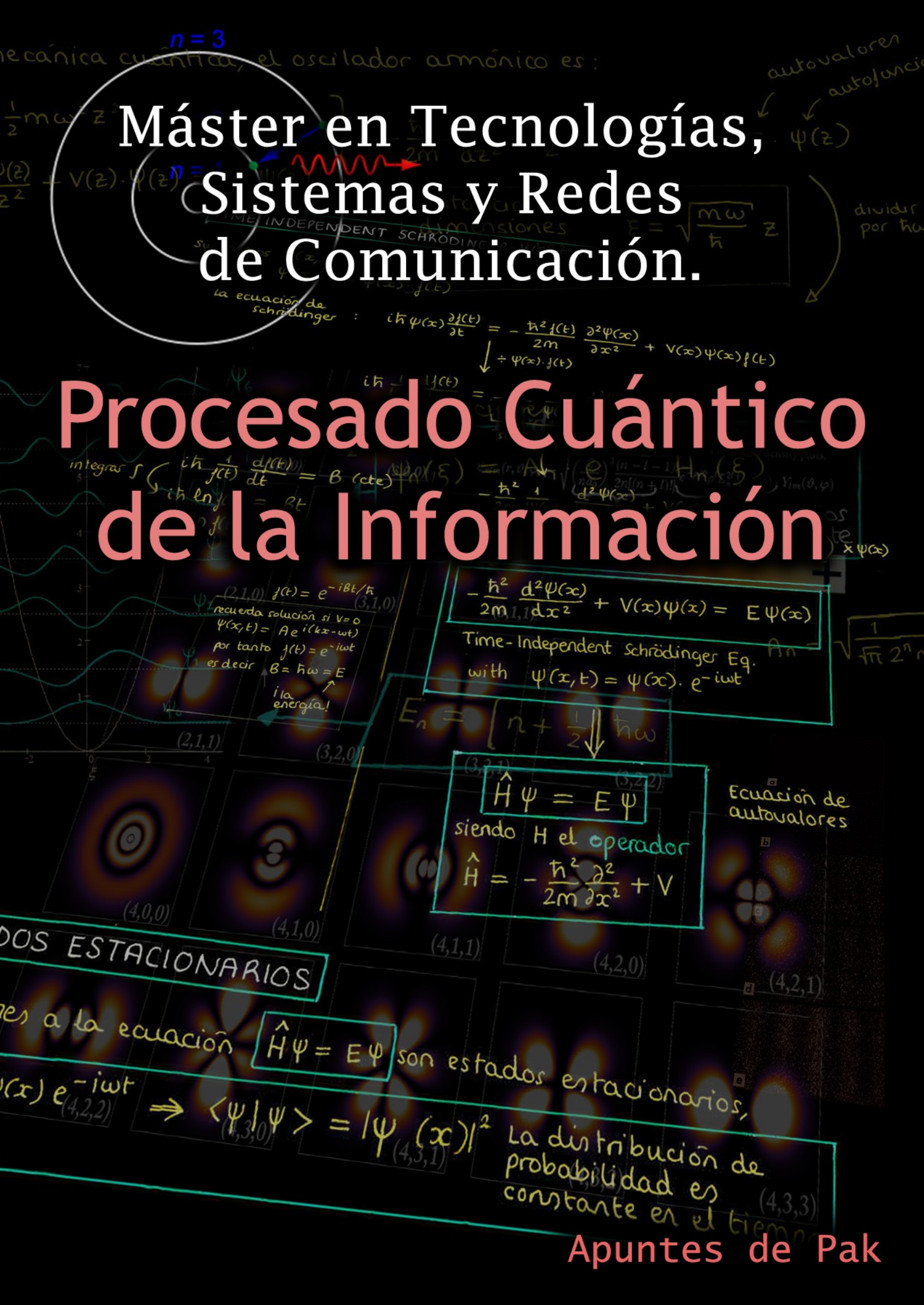


# Máster en Tecnologías, Sistemas y Redes de Comunicación.

## Procesado Cuántico de la Información



## **Seminario: Procesado Cuántico de la Información**

Apuntes de Pak (Francisco José Rodríguez Fortuño)  
ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.  
Máster en Tecnologías, Sistemas y Redes de Comunicación.  
Segundo cuatrimestre.  
Curso 2008/2009

### **Contenido**

Apuntes extensos de la asignatura (sin resumen)

### **Referencias y agradecimientos**

Estos apuntes están basados en las clases y el material aportado por el profesor Dr. *Miguel A. Muriel*, a quien agradezco profundamente por sus divertidas e interesantes clases y por animarme a elaborar estos apuntes.

Además he hecho un uso extensivo de los siguientes libros, muy recomendados:  
*Quantum mechanics for Scientists and Engineers*. David A. B. Miller.  
*Quantum optics: an introduction*. Anthony Mark Fox

**Fecha de última actualización:** 23 Agosto 2009



# SEMINARIO: PROCESADO CUÁNTICO DE LA INFORMACIÓN

I - 1

## SESIÓN 1. RELATIVIDAD, ÁTOMO DE BOHR, RADIACIÓN EM Y DUALIDAD ONDA-PARTÍCULA

### • ANTECEDENTES

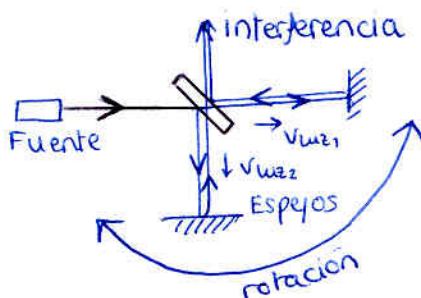
"There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement."  
- Lord Kelvin, 1900

En el 1900 se pensaba que en física ya estaba todo explicado. No obstante fue el propio Kelvin quien nombró las 'nubes negras' que aún faltaban por explicar:

1: La existencia del éter → el medio por el cual se propagan las ondas electromagnéticas

El experimento de Michelson y Morley se diseñó para medir la velocidad de la tierra respecto del éter.

Se basaba en un montaje interferométrico para medir la diferencia de la velocidad de propagación de la luz en direcciones distintas.



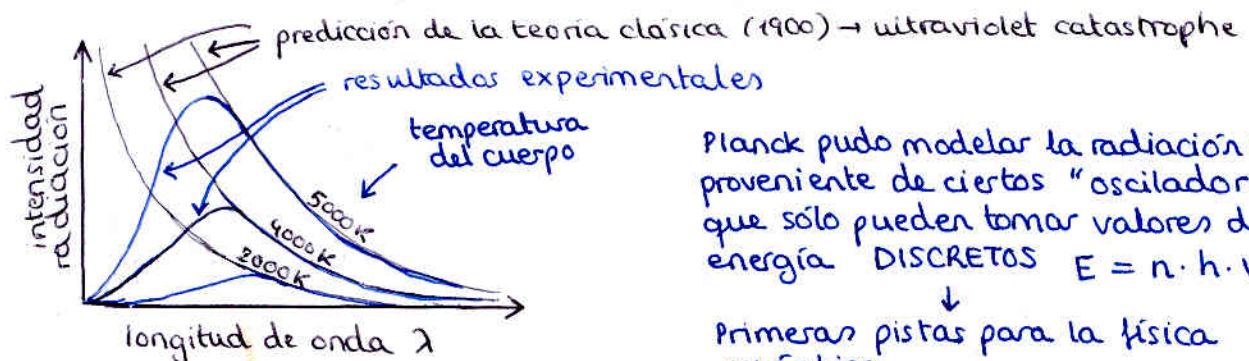
La interferencia debería cambiar según se rota el montaje debido al movimiento de la tierra respecto al éter, que implica velocidades de propagación de la luz distintas según la dirección de propagación.

No se observaron tales cambios; la luz se propaga a la misma velocidad en todas las direcciones. No existe éter.

2. La radiación del cuerpo negro

← es un material teórico hipotético que es útil para entender cosas pero no existe en la realidad.

- material que no refleja, sólo absorbe, la radiación que le incide.
- La única radiación que sale del objeto es la emitida por éste debido a su temperatura



Planck pudo modelar la radiación como proveniente de ciertos "osciladores" que sólo pueden tomar valores de energía DISCRETOS  $E = n \cdot h \cdot \nu$

↓  
Primeras pistas para la física cuántica

Otras nubes negras:

- líneas espectrales de emisión/absorción discretas
- Las ecuaciones de Maxwell no son invariantes a transformaciones galileanas (sistemas en movimiento)



## EXISTENCIA DE ÁTOMOS

- Max Planck utilizó 'cuantos' submicroscópicos para explicar la radiación de cuerpo negro.
- Boltzmann necesitó postular la existencia de átomos para sus avances en mecánica estadística
- Einstein utilizó moléculas para explicar el movimiento Browniano

## EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD

Todas las deducciones de Einstein parten de una misma idea, el principio de relatividad, que dice:

Todas las leyes de la física son iguales en todos los sistemas de referencia inerciales (i.e. sin aceleración)

↳ Incluyendo las leyes del movimiento  
(esto ya se sabía; la caída vertical de un objeto desde la mano de un viajero en tren se puede ver como un tiro parabólico desde el andén)

↳ Más tarde lo generalizó también a los que tenían aceleración, dando lugar a la Teoría General de la Relatividad

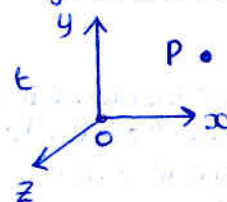
↳ Incluyendo también las leyes del electromagnetismo (Ecuaciones de Maxwell)

↳ La velocidad de la luz debe ser la misma en todos los sistemas de referencia

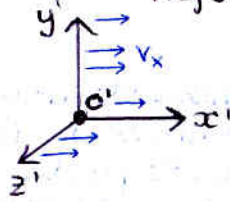
↳ Por lo tanto, no hay ninguna forma de detectar el movimiento absoluto respecto a un sistema de referencia "en reposo". Dicho sistema "preferido" no existe. ¿Con qué derecho afirmas que un sistema está en reposo y otro en movimiento, y no al revés? No puedes.

### Transformaciones galileanas para sistemas en movimiento

Sistema de Referencia K



Sistema de Referencia K' (moviéndose a velocidad  $v_x$  respecto a K)



Un punto P del espacio puede definirse en cualquiera de los dos sistemas

$$P = (x, y, z, t) = (x', y', z', t')$$

El cambio de coordenadas de uno a otro puede deducirse pensando con lógica del día a día



$$\begin{aligned} x' &= x - v_x t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Transformación Galileana

⇒ Pero esta transformación NO cumple el principio de la relatividad para la luz.

Si P se mueve a  $v=c$  en el sistema K, NO se mueve a  $c$  en el sistema K'.

III A pesar de ser lógica, esta transformación es errónea!!!

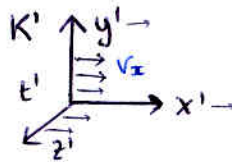
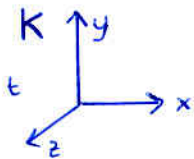


Las ecuaciones de Maxwell no son invariantes ante transformaciones galileanas; Einstein dedujo que las transformaciones galileanas eran erróneas y buscó una transformación ante la cual las ecuaciones de Maxwell fueran invariantes: ello implica que la luz se mueva a la velocidad de la luz tanto en  $K$  como en  $K'$

### Transformaciones de Lorentz

Cumplen que una fuente de luz tenga un frente de ondas esférico TANTO en  $K$  como en  $K'$

$K: x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$   
 $K': (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (ct')^2$



$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( t - \frac{v}{c} \cdot \frac{x}{c} \right)$$



Y lo más elegante de todo es que si  $v \ll c$ , las transf. de Lorentz se convierten en las Galileanas; por eso estas últimas son tan lógicas en el día a día

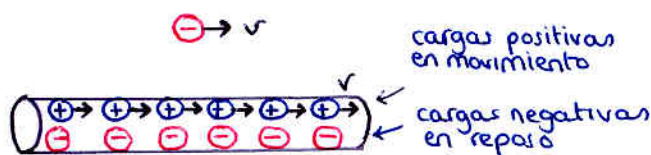
i Contracción espacial!  
 ii Contracción temporal!!  
 iii Problemas de simultaneidad!!!

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Einstein estaba convencido de que los campos magnéticos se observan como campos eléctricos desde otro sistema de referencia; lo cual es lógico puesto que ¿qué diferencia hay entre un hilo de corriente y un hilo cargado, más que un cambio en el sistema de referencia?

ejemplo: hilo de corriente y carga en movimiento

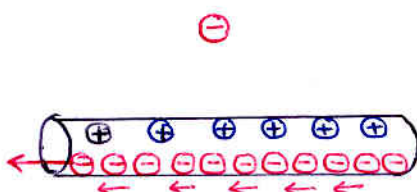
• Sistema de Referencia  $K$



El campo eléctrico se cancela  
 la carga sufrirá la fuerza del campo magnético creado por la corriente

$$\vec{F} = \underbrace{q\vec{E}}_0 + \underbrace{q\vec{v} \times \vec{B}}_{\text{hacia arriba}}$$

• Sistema de Referencia  $K'$



Ahora las cargas negativas en el hilo se están moviendo, y por tanto sufren contracción espacial de Lorentz, aumentando por tanto su densidad.

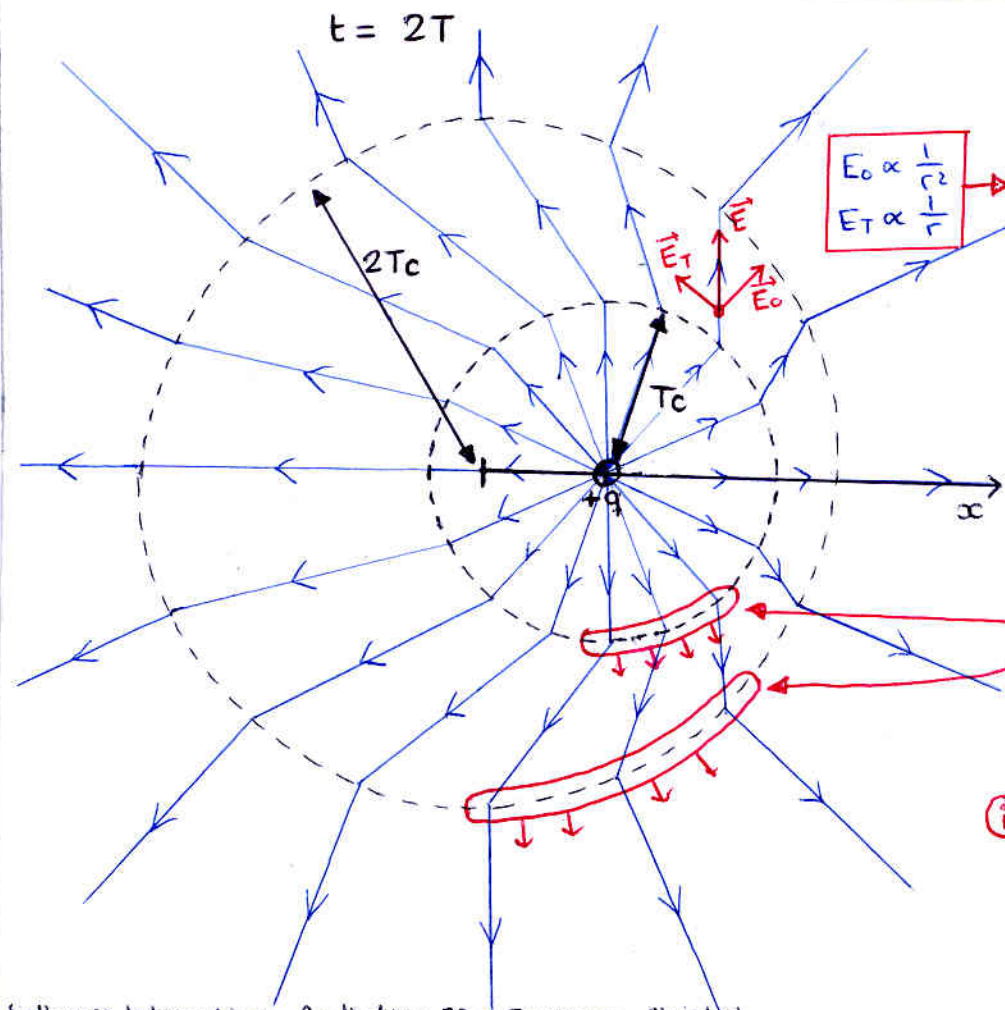
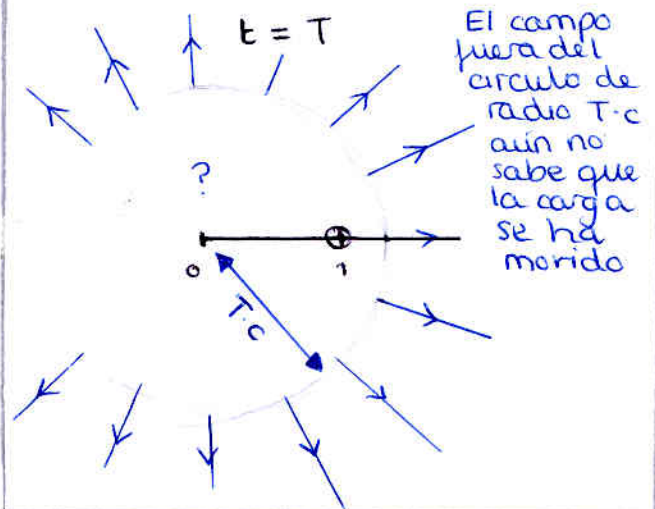
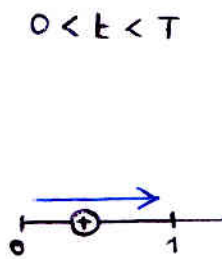
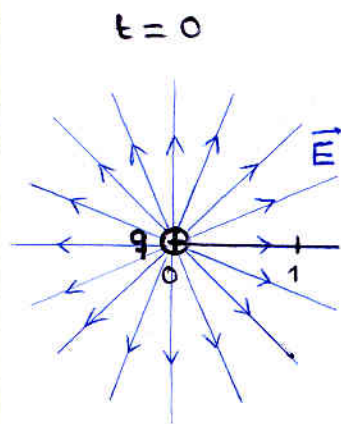
El campo eléctrico ya No se anula

$$\vec{F} = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{hacia arriba}} + \underbrace{q\vec{v} \times \vec{B}}_0$$

# RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA → una visión intuitiva

- Recuerda: la radiación EM tiene lugar cuando una carga eléctrica acelera
- La teoría clásica nos dice que el campo  $\vec{E}$  apunta hacia afuera de donde está una carga  $+q$ . Pero ¿cómo sabe el campo  $\vec{E}$  a una distancia  $\vec{r}$  dónde está la carga AHORA? No puede saberlo, de acuerdo a la teoría de la relatividad. sólo puede saber donde estaba hace un tiempo  $T = r/c$ .

ejemplo: carga  $+q$   $-\infty < t < 0 \rightarrow$  carga en  $\vec{r}' = \vec{0}$   
 $0 < t < T \rightarrow$  carga se mueve de  $\vec{r}' = \vec{0}$  hasta  $\vec{r}' = 1 \hat{x}$   
 $T < t < \infty \rightarrow$  carga quieta en  $\vec{r}' = 1 \hat{x}$



$$E_0 \propto \frac{1}{r^2}$$

$$E_T \propto \frac{1}{r}$$

La componente tangencial del campo ( $E_T$ ) predomina sobre la radial a grandes distancias

- $r \uparrow \Rightarrow E_T \gg E_0$
- el campo es transv. radiación EM!!
- $E_T$  es proporcional a la aceleración y decrece como  $1/r$

$$E_T = \frac{q \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} a(t - \frac{r}{c})$$

$$= \frac{\mu_0 q \sin \theta}{4\pi r} a(t - \frac{r}{c})$$

Esta perturbación es radiación electromagnética

❗ Curioso, en la dirección  $x$  NO HAY radiación, tal y como se espera de un dipolo!



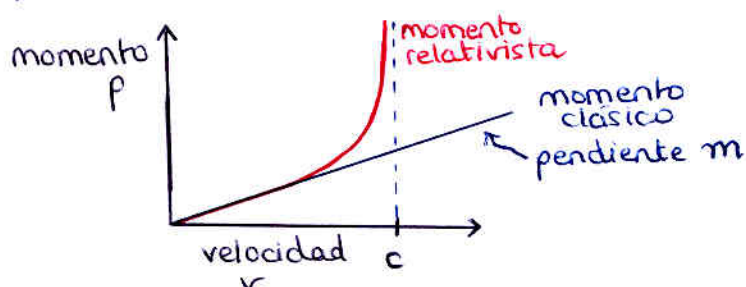
# ENERGÍA DE LAS PARTÍCULAS

Los nuevos conceptos de relatividad ponen en contradicción la segunda Ley de Newton y el principio de conservación del momento.

Para resolver dicha contradicción, se puede redefinir el momento :

$$\vec{p} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\gamma} m \cdot \vec{v}$$

$\gamma \begin{cases} \infty & \text{si } v=c \\ 1 & \text{si } v \ll c \end{cases}$   
 $\gamma \cdot m \equiv \text{masa efectiva}$



Y la energía cinética de una partícula :

$$E_c = m c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$= m c^2 (\gamma - 1)$$

si  $v=c \rightarrow E_c = \infty$

si  $v \ll c \rightarrow E_c = \frac{1}{2} m v^2$  ↙ el resultado clásico

$$E_c = \gamma m c^2 - \underbrace{m c^2}_{\text{Energía en reposo}}$$

masa en reposo  
 $E_0 = m c^2$  ← la mítica ecuación

De forma que la energía TOTAL de una partícula :

$$E = E_0 + E_c = \gamma m c^2$$

↙ es como una masa equivalente que aumenta con la velocidad

• Momento y energía total

Desarrollemos:  $p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2$

$$= \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4$$

$$= E^2 - E_0^2$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\downarrow$$

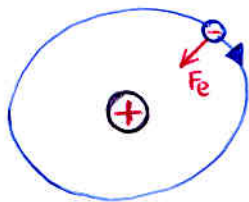
$$v^2 = c^2 - \frac{c^2}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Las cantidades  $(E^2 - p^2 c^2)$  y  $m$  son invariantes entre sistemas de referencia.  
 la energía cinética  $E_c$  no lo es

# ÁTOMO DE BOHR

## Modelo clásico:



Problema: una carga acelerada (el electrón dando vueltas) radia energía electromagnética, por tanto pierde energía, por tanto debería reducirse su radio hasta caer en el núcleo

Solución: Planck acababa de sugerir el comportamiento cuántico de la radiación → modelo radicalmente nuevo



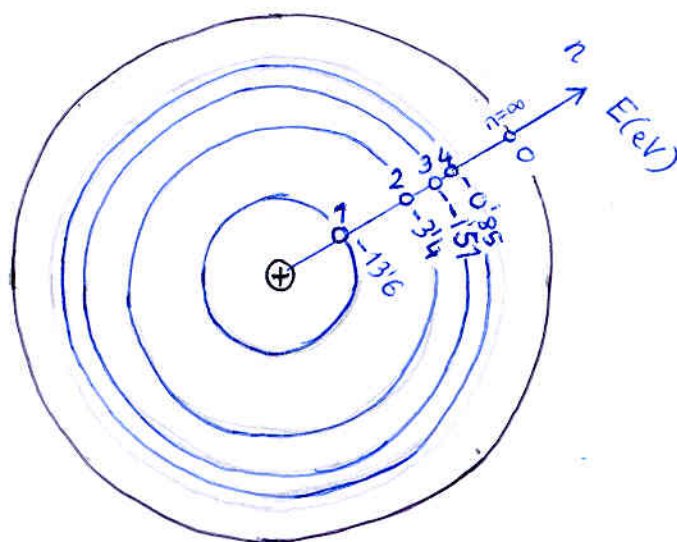
## Módulo de Bohr

1 → Estados estacionarios de energías definidas donde los electrones No radian.

Pueden ocurrir transiciones entre estados, liberando cuantos de luz de energía:  $E = E_n - E_{n'} = h\nu$

2 → Las leyes de la física no se aplican a las transiciones entre estados pero sí en el resto de casos

3 → El momento angular del estado  $n$ -ésimo es  $n \cdot \hbar$  (momento angular cuantizado)



Esto explica las líneas espectrales de emisión y absorción.

Aún falta entender PORQUÉ sólo existen esos estados estables cuantizados

↓  
Dualidad onda-partícula

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

↑  
cinética + potencial (física clásica)

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m e^2}$$

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0 n^2} = -\frac{E_0}{n^2}$$

$E_0 = 13.6 \text{ eV}$



# EFFECTO FOTOELÉCTRICO

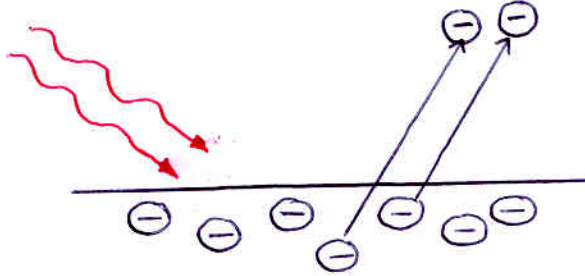
Einstein sugirió que la radiación electromagnética está cuantizada en partículas llamadas fotones. La energía de un fotón depende de su frecuencia:

$$E = h \cdot \nu$$

$\uparrow$  cte. de Planck       $\uparrow$  frecuencia

Efecto fotoeléctrico: La luz incidente en un material transfiere energía a sus electrones, los cuales pueden escapar

fotones  
 $E = h \cdot \nu$



Electrón Libre:

$$E = \phi + \frac{1}{2}mv^2$$

$\uparrow$  Energía potencial que debe superarse para que un electrón pueda escapar

$\frac{1}{2}mv^2$  Energía cinética tras escapar

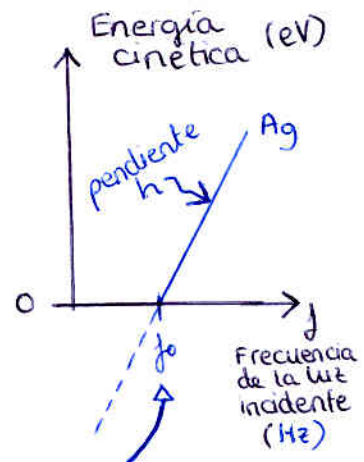
El balance de energías:

$$h\nu = \phi + \frac{1}{2}mv^2$$

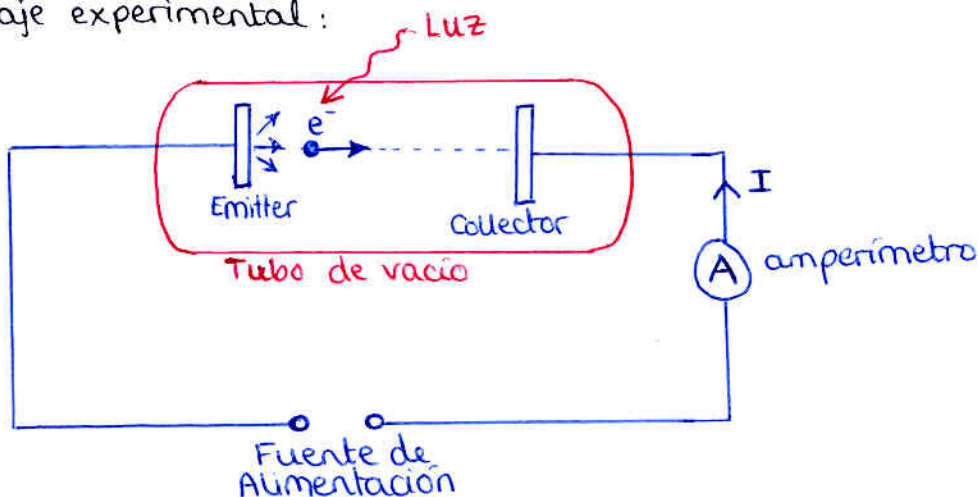
Para que puedan escapar electrones:

$$h\nu > \phi$$

Lo cual explicó porque por debajo de una cierta frecuencia de la luz  $\nu_0$  no se observa el efecto fotoeléctrico por muy intensa que sea la luz incidente (número de fotones)



Montaje experimental:



# DUALIDAD ONDA PARTÍCULA

En su tesis de 1923, el príncipe Louis de Broglie escribió "tanto para materia como para radiación, es necesario introducir el concepto de partícula y de onda al mismo tiempo"

Aunque muchos lo olvidan, utilizó conceptos de la Teoría de la Relatividad para llegar a sus conclusiones

Consideremos una masa ' $m$ ' que viaja con un sistema de coordenadas  $O'$ , de forma que en  $O'$  la masa está quieta en el origen  $x'=0, v'=0$ .

Consideremos que la masa es además una onda.

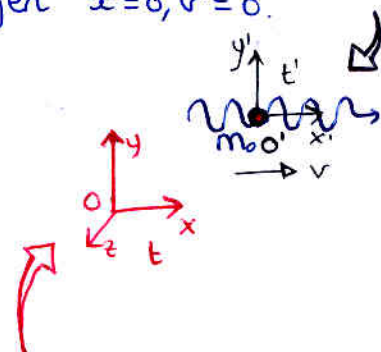
Si nos fijamos en  $x'=0$ , la fase de esa onda será:

$$\phi = -\omega' t'$$

igualando energías:

$$\phi = -\frac{m_0 c^2}{h} t'$$

$m_0 c^2 = \hbar \omega'$	
Energía de partícula en reposo	Energía de una onda



Ahora cambiamos a otro sistema de coordenadas  $O$  donde la masa no está en reposo sino que se mueve a velocidad  $v$

transformación de Lorentz: 
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Por tanto la fase de la onda en el otro sistema:

$$\phi = -\frac{m_0 c^2}{h} t' = -\frac{m_0 c^2}{h} \left( \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\phi = \underbrace{\frac{\frac{m_0 v}{h}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}_k x - \underbrace{\frac{\frac{m_0 c^2}{h}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}_{\omega} t$$

$k$  número de onda [rad/m]       $\omega$  pulsación [rad/s]

$$= \frac{\gamma m_0 \cdot v}{h} x - \frac{\gamma m_0 c^2}{h} t$$

$$= \frac{p}{h} x - \frac{E}{h} t$$

$m = \gamma m_0$   
masa equivalente de la masa en movimiento

$$\omega = \frac{E}{h} \rightarrow \boxed{E = \hbar \omega}$$

$$k = \frac{p}{h}$$
$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{h}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$$

Longitud de onda de de Broglie asociada a una partícula



ejemplo:

- Longitud de onda de de Broglie para una pelota a 1 m/s

$$\left. \begin{array}{l} m = 1 \text{ kg} \\ v = 1 \text{ m/s} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = 6.63 \times 10^{-34} \text{ m}$$

$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

← longitud de onda demasiado pequeña como para observar efectos de interferencia

- Longitud de onda de de Broglie para un electrón a  $10^6 \text{ m/s}$

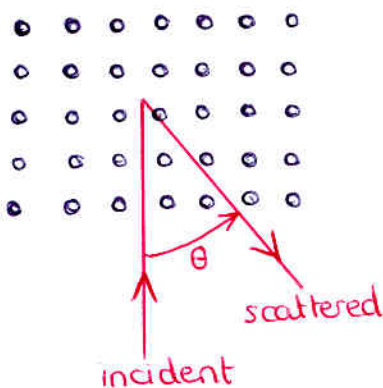
$$\left. \begin{array}{l} m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ v = 10^6 \text{ m/s} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = 7.28 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

↓  
Misma longitud de onda que los rayos X

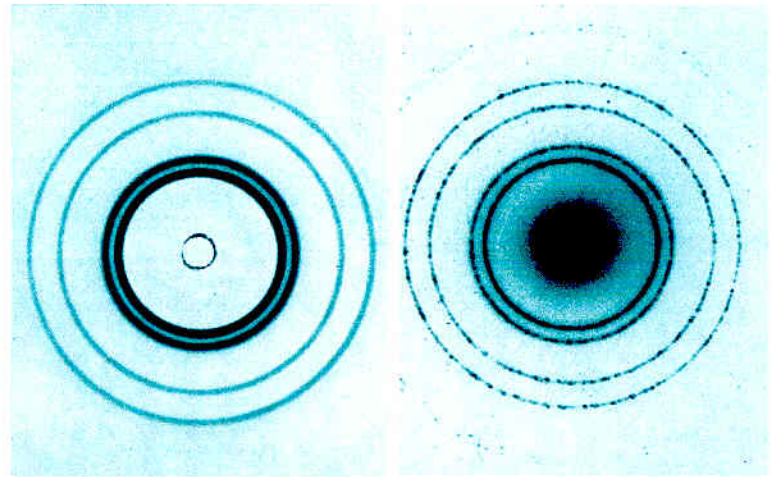
Comprobación experimental:

Scattering de luz y de electrones en un cristal

(red periódica de átomos)  
↳ efecto de Bragg



Resultado experimental:



Rayos X

Electrones

→ Explica el modelo de átomo de Bohr

Los niveles estables de energía de los electrones encajan con los momentos a los cuales la órbita del electrón encaja con un número entero de sus longitudes de onda

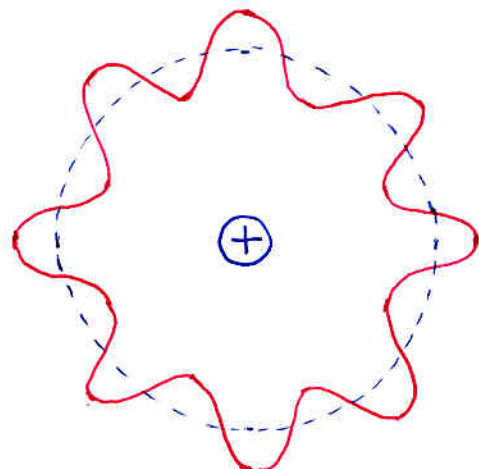
$$n \cdot \lambda = 2\pi r$$

Recuerda, Bohr dijo que el momento angular estaba cuantizado

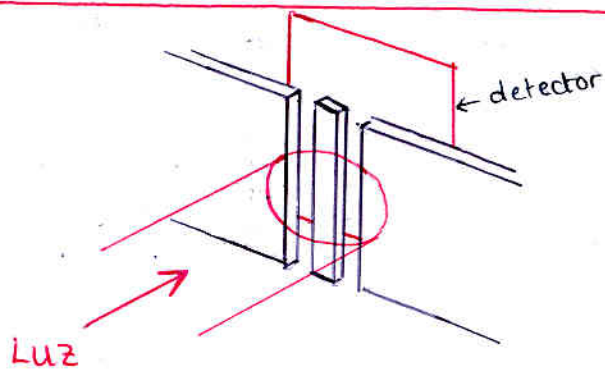
$$L = r \cdot p = \frac{nh}{2\pi}$$

$$\Rightarrow p = \frac{nh}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi r}{n}$$



# EXPERIMENTO DE LA DOBLE RENDIJA DE YOUNG

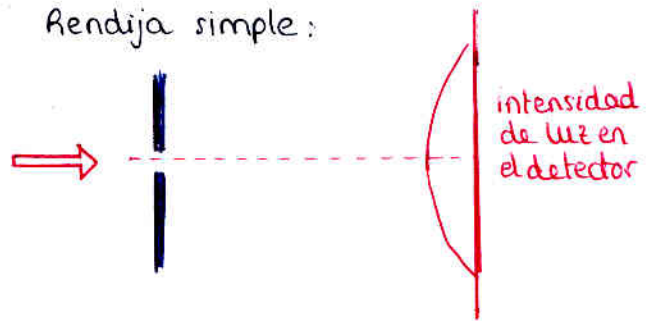


La pregunta es: si reduzco la intensidad de la luz hasta que sólo se emitan fotones individuales ¿qué ocurrirá?

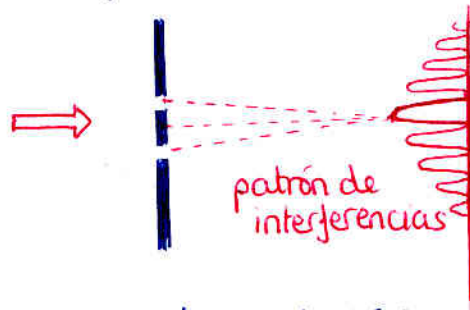
Parece lógico que si sólo se emite un fotón cada vez, el fotón pase por uno u otro agujero, y por tanto tras muchos fotones se debería recuperar dos copias desplazadas de la distribución de un sólo slit.

Los resultados experimentales fueron sorprendentes:

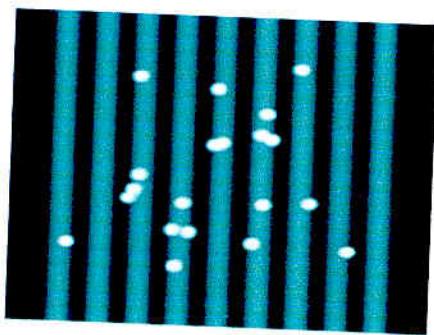
Rendija simple:



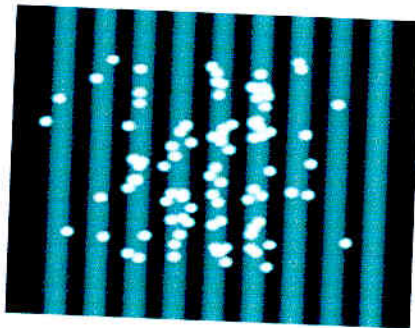
Rendija doble:



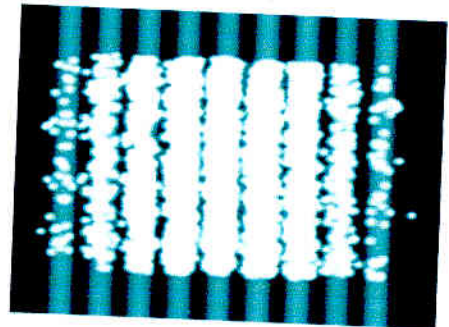
Comportamiento típico de ondas



20 counts



100 counts



~4000 counts

Resulta que CADA fotón individualmente cae en el detector con una distribución igual al patrón de interferencias de dos slits. Esto quiere decir que cada fotón "sabe" que hay dos slits; o dicho de otro modo: **¡¡cada fotón pasa por los dos slits a la vez e interfiere consigo mismo!!** pero en el detector se observa un único punto

⇒ cuando estamos observando, el fotón es una partícula.  
cuando no observamos, el fotón es una onda

Principio de complementariedad de Bohr. El fotón nunca es partícula y onda AL MISMO TIEMPO

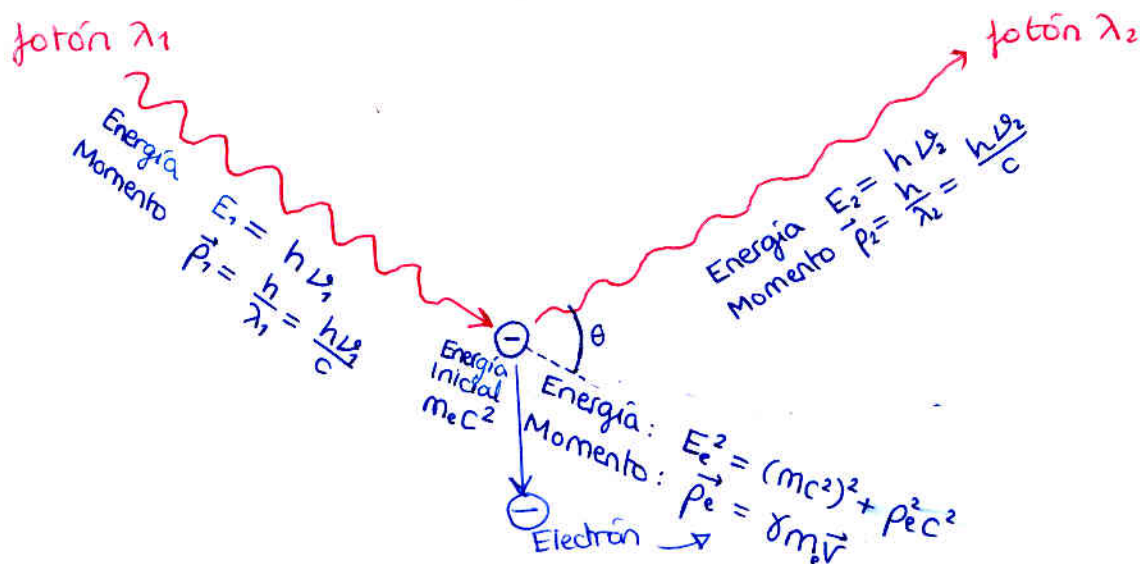
El experimento puede repetirse con cualquier partícula: electrones, átomos, moléculas, neutrones, ...



## EFEECTO COMPTON

cuando un fotón entra en la materia, puede interactuar con un electrón.

- Ley de conservación de la energía
  - Ley de conservación del momento
- } como en cualquier colisión elástica



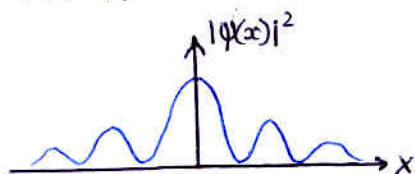
Puede deducirse el cambio en longitud de onda:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$$

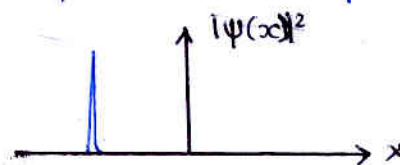
## LA FUNCIÓN DE ONDA $\Psi$

- $\Psi$  contiene toda la información de un sistema arbitrariamente grande
- $\Psi$  es:
  - normalizada
  - vector infinito-dimensional que vive en el espacio de Hilbert ( $L_2$ )

$|\Psi(x)|^2$  es la distribución de probabilidad de la posición de una partícula

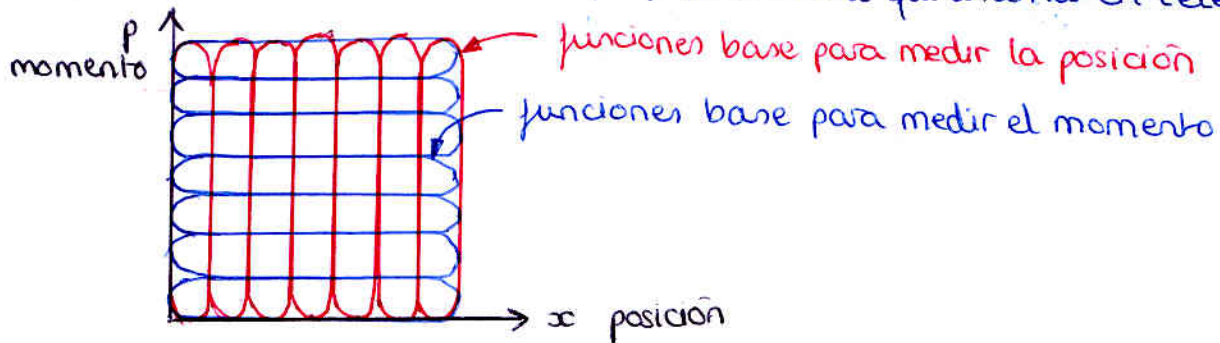


Al hacer una medida de la posición de la partícula, la función de onda "colapsa" a una de sus posiciones con una probabilidad igual a su módulo al cuadrado. Es irreversible.



- Intuitivamente; imagínate una partícula como una "nube de probabilidades"  $\Psi$  (aunque recuerda que la probabilidad es  $|\Psi|^2$  y no  $\Psi$ ).
- Esta 'nube' se comporta como una onda; puede cruzar dos slits a la vez e interferir consigo misma; puede separarse en caminos y luego recombinarse interferométricamente... pero en cuanto se mide ALGO de la partícula,  $\Psi$  se colapsa a alguna de sus funciones base (en el caso de medir la posición, colapsa a una de las funciones base asociada a alguna posición) con una probabilidad igual a la proyección de  $\Psi$  sobre dicha función base (módulo al cuadrado)

- Si lo que se mide es la energía del sistema,  $\psi$  colapsa a alguna de sus funciones base de distintas energías.
- Si lo que se mide es el momento,  $\psi$  colapsa a alguna de las funciones base de momento fijo (el momento ' $p$ ' es la transformada de Fourier de la posición ' $x$ ', por eso no se puede medir con mucha precisión simultánea el momento y la posición: no hay ninguna función base simultáneamente estrecha en  $x$  y en  $p$ ; las estrechas en  $x$  son anchas en  $p$  y viceversa, análogamente a los dominios tiempo y frecuencia que usamos en teleco)

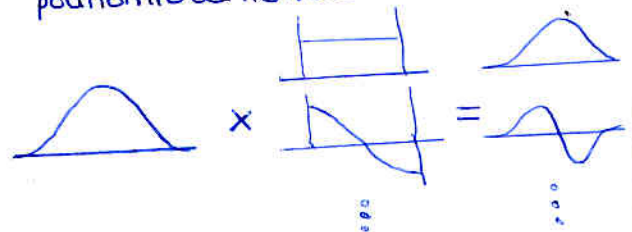


Un caso curioso son las funciones base de Gauss-Hermite con la propiedad de ser iguales a su transformada de Fourier, y por tanto simétricas en  $x-p$ .



miden simultáneamente el momento y la posición, pero nunca con una precisión superior al principio de incertidumbre

campana de Gauss multiplicada por polinomio de Hermite



### Interpretaciones al colapso de la función de onda

- Realista: la medida de la posición de la partícula indica que ésta realmente estaba ahí antes de ser medida. ← Einstein pensaba así
- Ortodoxa: al medir la partícula la estás obligando a decidir su posición. Antes de la medida la partícula no tenía posición. Dios no sabía donde estaba la partícula.
- Agnóstica: No tiene sentido preguntarse dónde estaba la partícula antes de medir. Preguntarse DÓNDE está la partícula es exactamente equivalente a medir la posición. La pregunta no tiene sentido sin la medida.

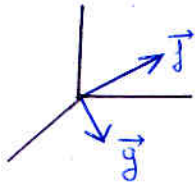


# SESIÓN 2: ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER, POZO CUÁNTICO, OSCILADOR ARMÓNICO, TEORÍA FORMAL

## ÁLGEBRA PREVIA: TRANSFORMADAS Y REPRESENTACIONES

### • PRODUCTO ESCALAR:

- En 3 dimensiones:



$$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$$

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$$

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle}{|\vec{f}| \cdot |\vec{g}|} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \cdot \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}}$$

- En infinitas dimensiones:

$f$  y  $g$  en lugar de depender de un índice dependen de una variable (puede ser tiempo  $t$ , espacio  $x$ , frecuencia  $\omega$ , vector de onda  $\vec{k}$ , ...) trabajaremos con  $t$ , pero valdría cualquier otro

$$f = f(t)$$

$$g = g(t)$$

complejos

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot g(t) dt$$

$$\cos \theta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) \cdot g(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt}}$$

### • OPERADORES:

Un operador es una instrucción, que aplicada a una función, nos da otra función

ejemplo matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{O} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix}$$

ejemplo funcional:

$$\hat{O} = 1 + \frac{\partial}{\partial t}$$

- Da lugar al concepto de valores y vectores propios de un operador (importantísimo en física)

$$\hat{O} \psi(t) = c \psi(t)$$

↑ operador      ↑ vector propio      ↑ valor propio (complejo)

- Operador hermítico:

$$\hat{O} \text{ hermítico} \iff \langle \psi_1, \hat{O} \psi_2 \rangle = \langle \hat{O} \psi_1, \psi_2 \rangle \iff \hat{O} = \hat{O}^+ \leftarrow \begin{matrix} \text{traspuesto conjugado} \\ = \text{adjunto} \end{matrix}$$

se cumple que:

$$\hat{O}_{\text{hermítico}} \cdot \psi_i(t) = c_i \cdot \psi_i(t)$$

↑ vector propio de una BASE ORTOGONAL COMPLETA (base propia)      ↑ valor propio REAL

como veremos, las cosas que se pueden MEDIR son operadores hermíticos aplicados sobre la función de onda

- Serie de McLaurin  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot z^n$  aplicada a operador hermítico:

$$\left( \sum_n a_n \hat{O}_n \right) \cdot \psi_i(t) = \left( \sum_n a_n \cdot c_i^n \right) \psi_i(t)$$

$\hat{O}_n$  aplicar  $n$  veces

$$\underbrace{f(\hat{O})}_{\text{es operador hermítico}} \cdot \psi_i(t) = f(c_i) \cdot \psi_i(t)$$

ejemplo: operador hermítico temporal

- Probemos si  $\frac{\partial}{\partial t}$  es operador hermítico:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_i(t) = c_i \cdot \psi_i(t) \rightarrow \begin{array}{l} \text{se puede lograr } c_i \text{ imaginario puro si} \\ \text{se usa la base } \{e^{j\omega_i t}\} \rightarrow c_i = j\omega_i \end{array}$$

$\Downarrow$

Por tanto  $\frac{\partial}{\partial t}$  no es hermítico, pero  $-j\frac{\partial}{\partial t}$  sí es hermítico:

$$\hat{O} = -j\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \left[ -j\frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \{e^{j\omega_i t}\} = \omega_i \cdot \{e^{j\omega_i t}\}$$

Para variables continuas, la base propia es  $e^{j\omega t} \leftrightarrow \langle e^{j\omega_1 t}, e^{j\omega_2 t} \rangle = \delta(\omega_1 - \omega_2)$

## • TRANSFORMADAS

Transformada  $\equiv$  Proyección sobre la base propia del operador involucrado

- ejemplo: función en dominio temporal  $t$  es la proyección sobre las funciones base  $\delta(t-t_i)$

$$f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_i) dt$$

$\uparrow$   
coeficientes de las funciones base

- ejemplo: función en dominio frecuencial  $\rightarrow$  funciones base  $e^{j\omega t}$

$$f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$



## NOTACIÓN DE DIRAC

$$\begin{array}{c} \text{BRA} \quad \text{KET} \\ \langle \phi | \psi \rangle \end{array} \text{Proyección de } \phi \text{ sobre } \psi \equiv \begin{array}{c} \text{BRA} \\ \langle \phi | \end{array} \begin{array}{c} \text{KET} \\ | \psi \rangle \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{fila} \\ [\phi_1^* \phi_2^* \dots \phi_m^*] \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{columna} \\ \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix} \end{array} \equiv \int \phi^* \cdot \psi \, dt$$

• Valor medio de un observable

$$\langle a \rangle = \langle \hat{A} \phi \rangle = \int \phi^* (\hat{A} \cdot \phi) \, dt$$

notación de Dirac

$$\begin{array}{c} \text{BRA} \quad \text{KET} \\ \langle \phi | A | \phi \rangle \end{array} \begin{array}{c} \text{fila} \quad \text{matriz} \quad \text{columna} \end{array}$$

ejemplo: operador posición  $x$

$$\langle x | \psi \rangle = [x] \cdot [\psi]$$

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = [-\psi^*] [x] [\psi]$$

$\hat{A} \phi_n = a_n \phi_n$   
↑  
real observable  
operador hermitico

## HEISENBERG Y SCHRÖDINGER

1925 → Heisenberg inventa la primera versión de la nueva teoría cuántica  
Mecánica Matricial

1926 → Schrodinger inventa la segunda versión: Mecánica de ondas

## THE SCHRÖDINGER WAVE EQUATION

For a particle of energy  $E$  moving in a potential  $V(x,t)$  in one dimension

Time Dependent  
Wave Equation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V \Psi(x,t)$$

Esta ecuación no se deduce, se postula porque coincide con experimentos

Cuando  $V=0$ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$\Psi(x,t) = A \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{con } \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \leftrightarrow \text{Total energy is the kinetic energy}$$

- La función de onda es compleja
- PERO las cantidades medibles (probabilidad, momento, energía,...) son reales

• La función de onda está normalizada  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \cdot \Psi(x,t) \, dx = 1$

→  $\Psi$  debe tender a cero en  $\infty$   
→  $\Psi$  debe ser finita en todo punto

• Probabilidad de que una partícula esté entre  $x_1$  y  $x_2$

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^* \cdot \Psi \, dx$$

→  $\Psi$  debe ser dos veces diferenciable

# TIME INDEPENDENT SCHRÖDINGER WAVE EQUATION

Suponemos  $V(x, t) = V(x)$

$$\psi(x, t) = \psi(x) \cdot f(t)$$

la ecuación de Schrödinger :  $i\hbar \psi(x) \frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2 f(t)}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x) f(t)$

↓  $\div \psi(x) \cdot f(t)$

$$\underbrace{i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt}}_{\text{sólo depende de } t} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x)}_{\text{sólo depende de } x}$$

integrar  $\int$   $i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = B \text{ (cte)}$   
 $i\hbar \ln f(t) = Bt$   
 $\ln f(t) = \frac{Bt}{i\hbar}$   
 $\downarrow$   
 $f(t) = e^{-iBt/\hbar}$

recuerda solución si  $V=0$   
 $\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$   
 por tanto  $f(t) = e^{-i\omega t}$   
 es decir  $B = \hbar \omega = E$   
 $\uparrow$   
 la energía!

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) = B = E \quad \times \psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Time-Independent Schrödinger Eq.  
 with  $\psi(x, t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$

$$\hat{H} \psi = E \psi$$

siendo  $H$  el operador

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$$

Ecuación de autovalores

## ESTADOS ESTACIONARIOS

Las soluciones a la ecuación  $\hat{H} \psi = E \psi$  son estados estacionarios, puesto que

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} \Rightarrow \langle \psi | \psi \rangle = |\psi(x)|^2 \quad \text{La distribución de probabilidad es constante en el tiempo}$$



## VALORES ESPERADOS

El valor esperado de una cantidad es la media ponderada:

$$\begin{cases} \langle x \rangle = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_N x_N & \text{si } x \text{ discreta} \\ \langle x \rangle = \int P(x) \cdot x \, dx & \text{si } x \text{ continua} \end{cases}$$

En mecánica cuántica,  $P(x) = \Psi(x) \cdot \Psi^*(x)$ , por lo tanto

$$\langle x \rangle = \int \Psi(x) \Psi^*(x) x \, dx = \int \Psi^*(x) \cdot x \cdot \Psi(x) \, dx$$

Y el valor esperado de una función

$$\langle g(x) \rangle = \int \Psi^*(x) \cdot g(x) \cdot \Psi(x) \, dx$$

## OPERADOR POSICIÓN

Directamente  $\hat{x} = x$

(sólo si expresamos  $\Psi$  en función de  $x$ ; si trabajásemos en dominio  $k$  sería diferente)

## OPERADOR MOMENTO

Recuerda:  
Partícula libre:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$$

$k = \frac{p}{\hbar}$        $\omega = \frac{E}{\hbar}$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik \cdot \Psi = i \frac{p}{\hbar} \Psi$$

Por lo tanto, despejando  $p$ :

$$p \cdot \Psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}$$

se define el operador momento

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

## OPERADOR ENERGÍA

Despejando  $E$ :

$$E \cdot \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

se define el operador energía:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

## VALOR ESPERADO DE POSICIÓN, MOMENTO Y ENERGÍA

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) x \cdot \Psi(x, t) \, dx \equiv \langle \Psi | x | \Psi \rangle$$

$$\langle p \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \cdot \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \cdot \overbrace{p \cdot \Psi(x, t)}^{-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x}} \, dx \equiv \langle \Psi | p | \Psi \rangle$$

$$\langle E \rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \cdot \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \cdot \underbrace{E \cdot \Psi(x, t)}_{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}} \, dx \equiv \langle \Psi | E | \Psi \rangle$$

# DEDUCCION DE LA EC. DE SCHRÖDINGER CON OPERADORES

Energía del sistema :

$$E = K + V$$

← energía cinética      ← energía potencial

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

$\times \psi$

$$E \cdot \psi = \underbrace{\frac{1}{2m} p^2 \psi + V \cdot \psi}_{H \cdot \psi}$$

← operador hamiltoniano

$$E\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$p\psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \cdot \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + V \cdot \psi \quad \longleftrightarrow \quad \text{Ecuación de Schrödinger}$$

tomando  $m = \gamma \cdot m_0$

$$p = m \cdot v$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 = K$$

El operador hamiltoniano también sirve para obtener la energía

$$\langle E \rangle = \langle \psi | E | \psi \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle$$

## ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN 3 DIMENSIONES

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \cdot \psi(\vec{r}, t)$$

$$\hat{r} = \vec{r}$$

$$\hat{p} = -i\hbar \left[ \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] = -i\hbar \nabla$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t)$$

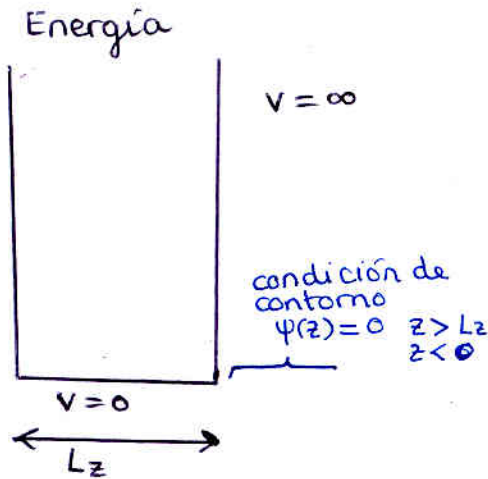
Notar que tanto  $\hat{E}$  como el Hamiltoniano  $\hat{H}$  son operadores para conocer la energía del sistema.

De hecho la ecuación de Schrödinger dice que

$$\hat{E} \psi = \hat{H} \psi$$



# POZO DE POTENCIAL INFINITO: "PARTÍCULA EN UNA CAJA"



Ec. de Schrödinger independiente del tiempo  
en  $0 < z < L_z \rightarrow V = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} = E \psi(z)$$

Solución general:

$$\psi(z) = A \sin(kz) + B \cos(kz)$$

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

Imponiendo condiciones de contorno:

$$\psi_n(z) = A_n \sin(k_n z)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L_z}$$

La energía de las soluciones:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2$$

Para que las soluciones estén normalizadas:

$$\int_0^{L_z} \psi_n(z) dz = |A_n|^2 \frac{L_z}{2} = 1 \rightarrow |A_n| = \sqrt{\frac{2}{L_z}}$$

$A_n$  puede ser complejo (tener fase)

Pero por simplicidad, consideremos  $A_n$  real:

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2$$

Ha nacido un comportamiento CUÁNTICO. Los niveles de energía permitidos están CUANTIFICADOS

- Las funciones  $\psi_n(z)$  son las autofunciones del problema  $\hat{H} \psi_n(z) = E_n \psi_n(z)$
- $\psi_n(z)$  forman un conjunto COMPLETO (base completa) y ORTONORMAL (eso es típico para las autofunciones de la ecuación de onda)

permite escribir cualquier  $f(z) = \sum c_n \psi_n(z)$  siendo  $c_n = \int_0^{L_z} \psi_n^*(z) f(z) dz$   
 $\uparrow$   $\psi(z)$  en  $t=0$

Para añadir la evolución temporal:

simplemente  $\psi_n(z, t) = \underbrace{c_n \psi_n(z)}_{\psi(z, t=0)} e^{-i\omega_n t}$   $\omega_n = E_n/\hbar$

cada término  $\psi_n(z)$  está asociado a una pulsación  $\omega_n$  distinta

Al expandir la serie  $\psi(z, t=0) = \sum c_n \psi_n(z)$ , la evolución temporal del sistema se obtiene sin más que añadir  $e^{-i\frac{E_n}{\hbar} t}$  a cada término  $\psi_n(z)$

# EVOLUCIÓN TEMPORAL DE UNA SUPERPOSICIÓN LINEAL EN UN POZO DE POTENCIAL INFINITO

ejemplo: la mitad en  $\psi_1$  y la mitad en  $\psi_2$

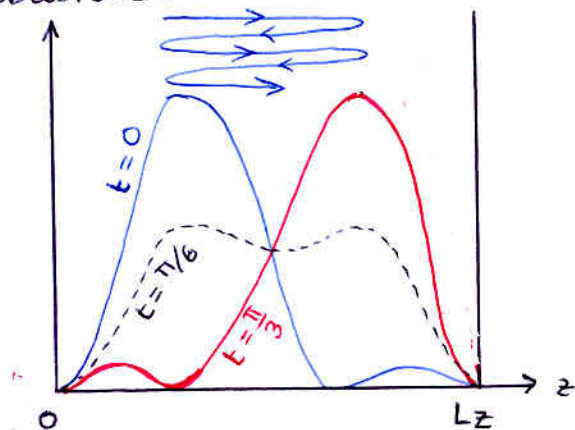
$$\psi(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{2}{Lz}} \sin\left(\frac{\pi z}{Lz}\right) e^{-\frac{E_1}{\hbar} t} \right] + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{2}{Lz}} \sin\left(\frac{2\pi z}{Lz}\right) e^{-\frac{E_2}{\hbar} t} \right]$$

↓  
la densidad de probabilidad

$$|\psi(z, t)|^2 = \frac{1}{Lz} \left[ \sin^2\left(\frac{\pi z}{Lz}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi z}{Lz}\right) + 2 \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \sin\left(\frac{\pi z}{Lz}\right) \sin\left(\frac{2\pi z}{Lz}\right) \right]$$

la evolución temporal de  $|\psi(z, t)|^2$  oscila a  $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

Densidad de Probabilidad



Es un resultado bastante general

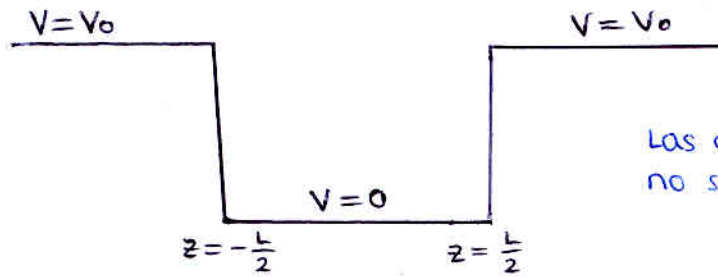
- En una combinación lineal de dos estados con energías  $E_a$  y  $E_b$ ; la densidad de probabilidad resultante oscila a  $\omega_{ab} = |E_a - E_b| / \hbar$
- No importa la energía absoluta sino la diferencia relativa

Si la superposición es de más estados, la evolución temporal de la densidad de probabilidad en general ya no se repite en el tiempo (con la excepción de que los niveles de energía estén en proporciones enteras entre ellos, i.e. equidistantes, como veremos en el oscilador armónico)



# PARTÍCULA EN UN POZO DE POTENCIAL FINITO

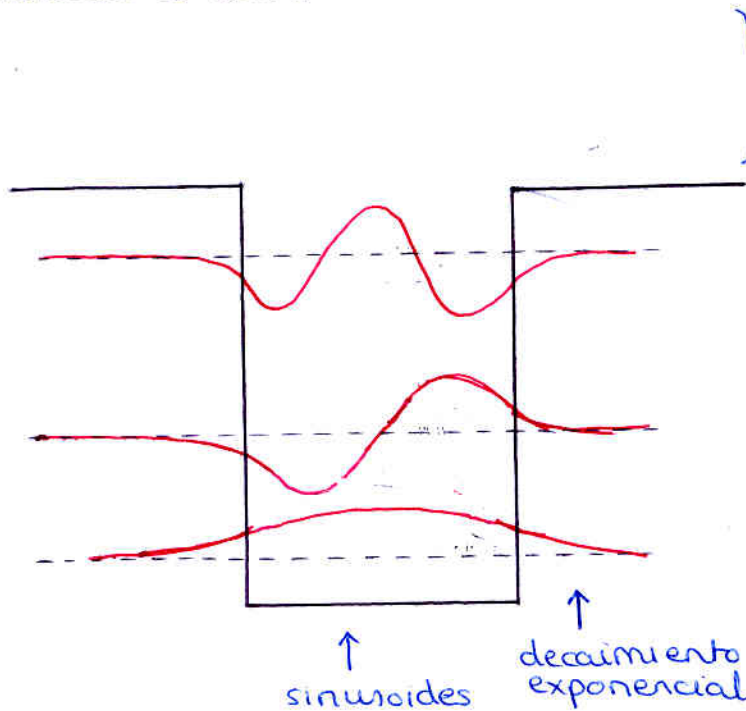
II-5



Las condiciones de contorno ya no son tan sencillas:

$$E \text{ y } V \text{ finitas} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2\psi}{dz^2} \text{ finita} \Rightarrow \frac{d\psi}{dz} \text{ continua} \\ \frac{d\psi}{dz} \text{ finita} \Rightarrow \psi \text{ continua} \end{cases}$$

Las soluciones son:



si la energía de la partícula supera la barrera de potencial, entonces hay un continuo de soluciones para todas las posibles energías (igual que las ondas planas en un problema de  $V$  constante)

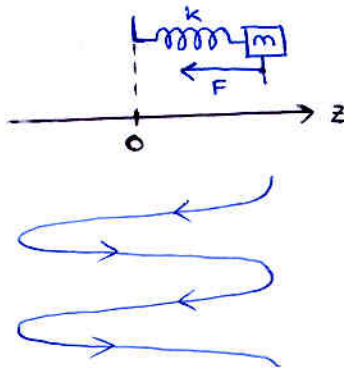
← Es totalmente análogo a una guía óptica dieléctrica

la partícula está concentrada en el pozo si la energía está por debajo de la barrera de potencial

# OSCILADOR ARMÓNICO

- Es otro problema de mecánica cuántica que admite solución exacta
- Una muy buena aproximación a todos los sistemas oscilantes (ej: fotones)

Recuerda: oscilador clásico



$$F = -kz$$

$$F = ma$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz$$

soluciones

$$\sin(\omega t) \text{ con } \omega = \sqrt{k/m}$$

El potencial

$$V(z) = \int_0^z -F dz$$

$$= \frac{1}{2} k z^2$$

$k = m\omega^2$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 z^2$$

En este oscilador se están intercambiando la posición  $z$  y el momento  $p = mv = m \frac{dz}{dt}$

De hecho:

$$p \propto \frac{dz}{dt}$$

$$z \propto \frac{dp}{dt}$$

oscilador  $z \propto a \rightarrow$

Es análogo a  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en las ecuaciones de Maxwell; uno nace de la derivada del otro

En mecánica cuántica, el oscilador armónico es:

$$V(z) = \frac{1}{2} m\omega^2 z^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + V(z) \cdot \psi(z) = E \cdot \psi(z)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 z^2 \psi(z) = E \cdot \psi(z) \end{aligned} \right\}$$

distancia sin dimensiones por sencillez matemática

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} z$$

dividir por  $\hbar\omega$

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \xi^2 \psi = \frac{2E}{\hbar\omega} \psi$$

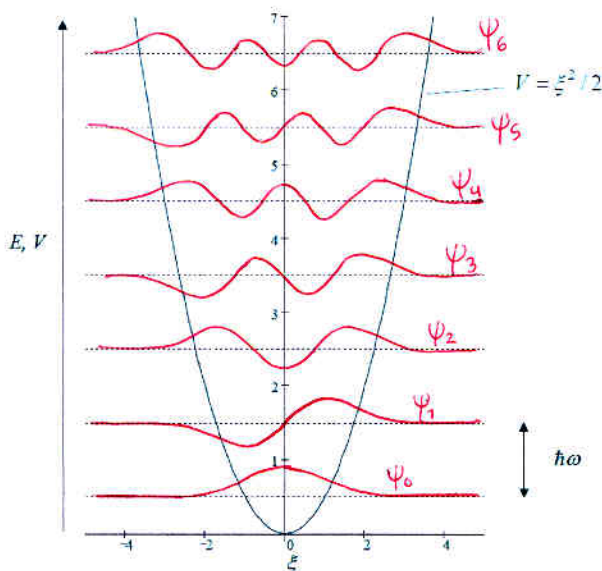
Las soluciones a esta ecuación son:

$$\psi_n(\xi) = A_n \cdot \underbrace{e^{-\xi^2/2}}_{\text{gaussiana}} \underbrace{H_n(\xi)}_{\text{polinomios de Hermite}}$$

Las soluciones existen bajo la condición

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

$$A_n = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!}}$$





Utilizando las coordenadas originales:

$$\Psi_n(z) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} z^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} z\right)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0$$

relación de recurrencia

$$H_n(\xi) = 2\xi H_{n-1}(\xi) - 2(n-1)H_{n-2}(\xi)$$

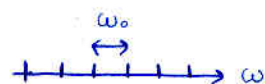
Diagrama de niveles de energía y funciones de onda:

- $H_0$ : 1
- $H_1$ :  $2\xi$
- $H_2$ :  $4\xi^2 - 2$
- $H_3$ :  $8\xi^3 - 12\xi$

- Pero estos son los estados estacionarios:  
Para tener oscilación hay que incluir superposición de estados
- Los estados estacionarios son o totalmente pares o totalmente impares (paridad definida)
- Los niveles de energía están EQUISPACIADOS

↳ Frecuencias de oscilación EQUISPACIADAS

↳ Serie de Fourier → Función temporal PERIÓDICA



- El primer estado NO TIENE ENERGÍA NULA → NO EXISTE la ausencia de energía en un oscilador armónico (i.e. nunca está "quieto" del todo!) como mínimo  $\hbar\omega/2$  por encima de la energía mínima en mecánica clásica

La superposición de estados estacionarios da lugar a una densidad de probabilidad con variación temporal periódica

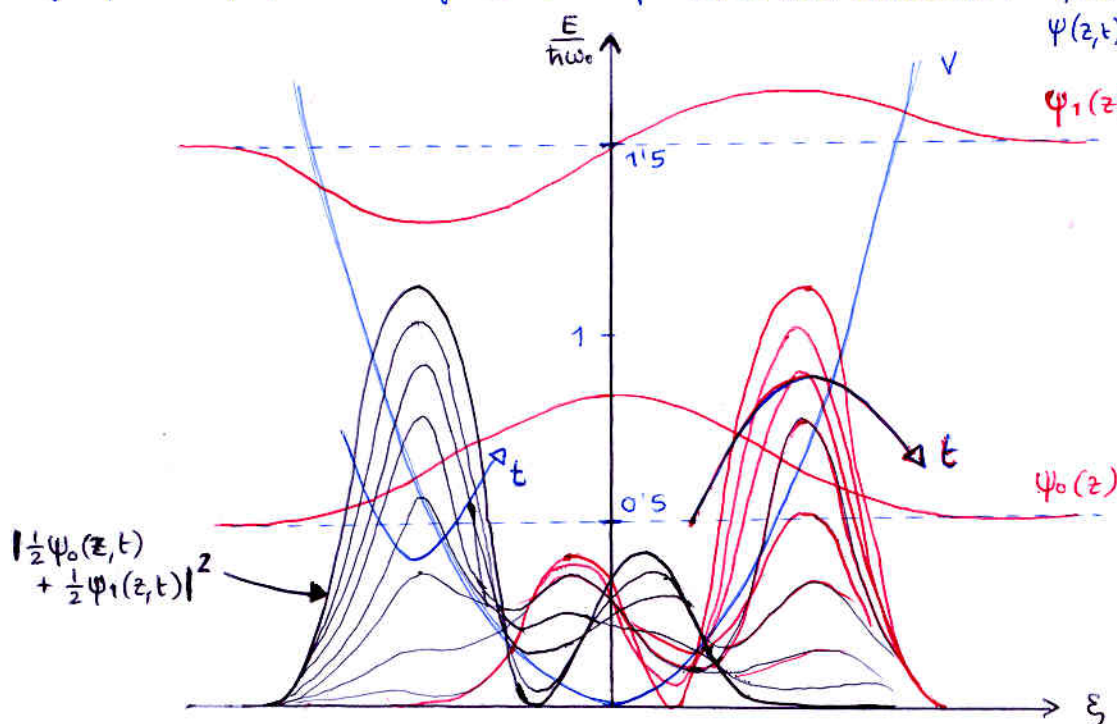
Gracias a los niveles de energía equiespaciados, la oscilación es SIEMPRE a  $\omega_0$  (o múltiplos)

### EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL OSCILADOR ARMÓNICO

ejemplo: superposición igual de los primeros dos estados:  $\psi(z) = \frac{1}{2}\psi_1(z) + \frac{1}{2}\psi_2(z)$

$$\psi(z,t) = \frac{1}{2}\psi_1(z)e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{2}\psi_2(z)e^{-i\omega_2 t}$$

diferente pulsación a cada estado



cuando una montañita sube, la otra baja.

"parece" una especie de oscilación a  $\omega_0$

# ESTADOS COHERENTES DEL OSCILADOR ARMÓNICO

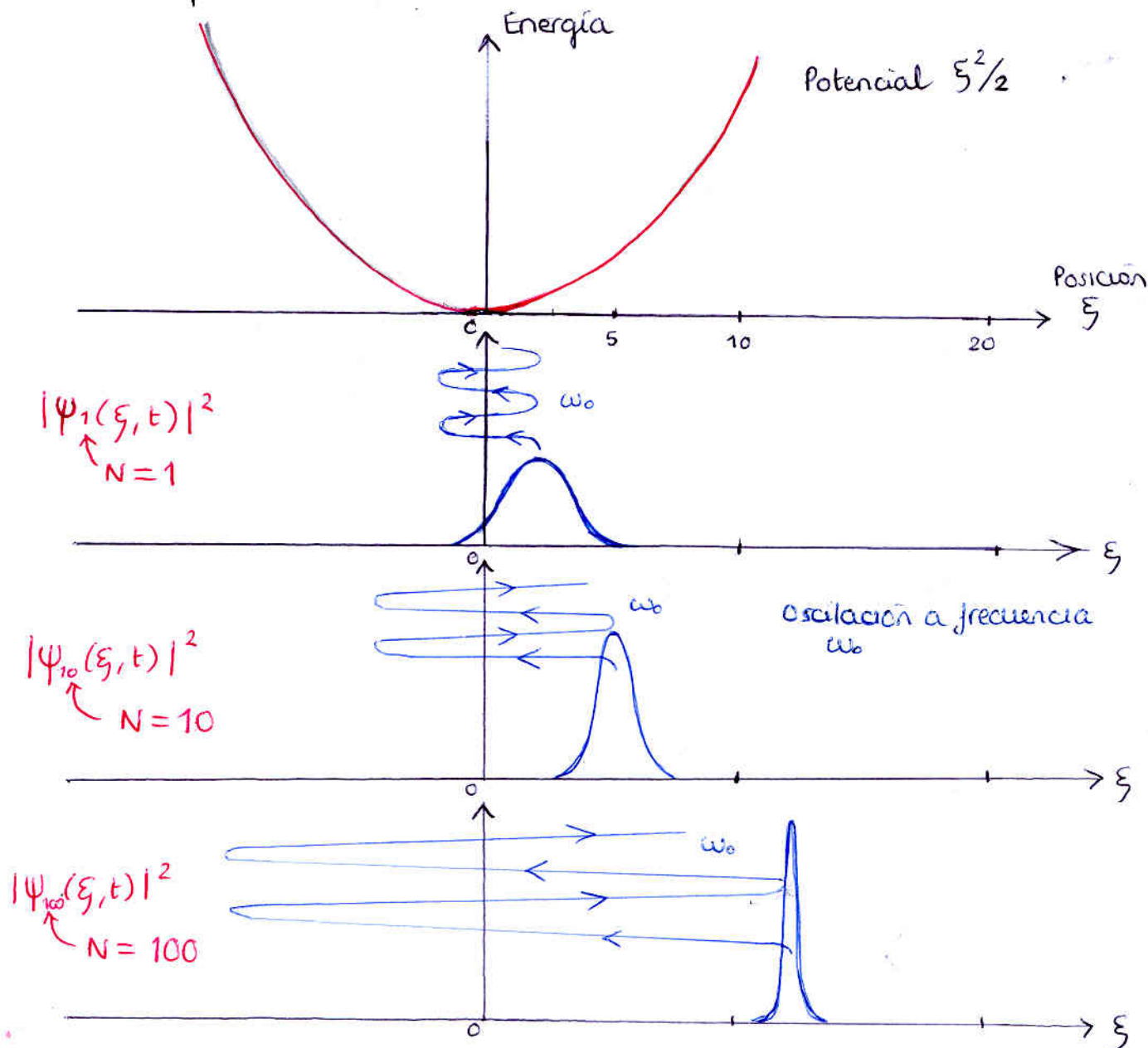
Los estados coherentes de un oscilador armónico son una superposición lineal de estados que corresponde perfectamente con la idea clásica de un oscilador armónico:

$$\psi_N(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{Nn} e^{-i[n+\frac{1}{2}]\omega_0 t} \psi_n(\xi)$$

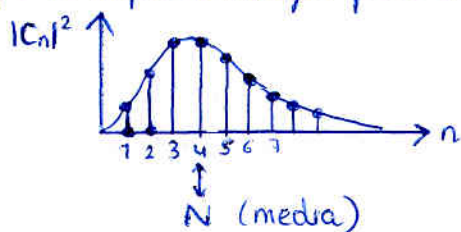
$$c_{Nn} = \sqrt{\frac{N! e^{-N}}{n!}}$$

Nota:  
 $|c_{Nn}|^2 = \frac{N^n e^{-N}}{n!}$  es la distribución de Poisson de media  $N$

Distribución de probabilidad:



Mayor  $N$  implica mayor peso a los estados de mayor energía



La esperanza en una medida de la energía es  $\langle E \rangle = \sum_n E_n |c_{Nn}|^2 = [N + \frac{1}{2}] \hbar \omega_0$



## MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS: VELOCIDAD DE GRUPO

La velocidad de grupo de un paquete de ondas viene dada como:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Para la luz en vacío o sonido en aire,  $k \propto \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_g = v_p$ 

velocidad de grupo  
↓  
 $v_g$

velocidad de fase  
↓  
 $v_p$
- Cuando  $\omega$  NO ES proporcional a  $k$ , se tiene dispersión:
  - ↳ espectro de absorción / variación del índice de refracción de un material } dispersión de material
  - ↳ En guías de onda, los modos de propagación pueden tener  $\omega = \omega(k)$  no proporcional a  $k$  } dispersión de estructura
  - ↳ Una estructura cuyo índice de refracción (u otra propiedad física) varía a escala comparable a  $\lambda$  }

## → VELOCIDAD DE GRUPO PARA UN ELECTRÓN LIBRE

La ecuación de Schrödinger con  $V=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\psi}{dz^2} = \underbrace{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}}_{E \cdot \psi} \Rightarrow \begin{cases} \psi(z,t) = A e^{i(kz - \omega t)} \\ \text{con } \underbrace{\hbar\omega}_E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{cases}$$

Es decir;  $\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \rightarrow \omega \propto k^2$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar}{m} k = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

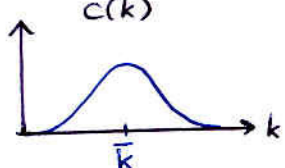
Y se cumple la ecuación de la mecánica clásica

$$E = \frac{1}{2} m v_g^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E \quad \left[ \text{Recuerda que para } V=0 \text{ toda la energía es cinética } E=K \right]$$

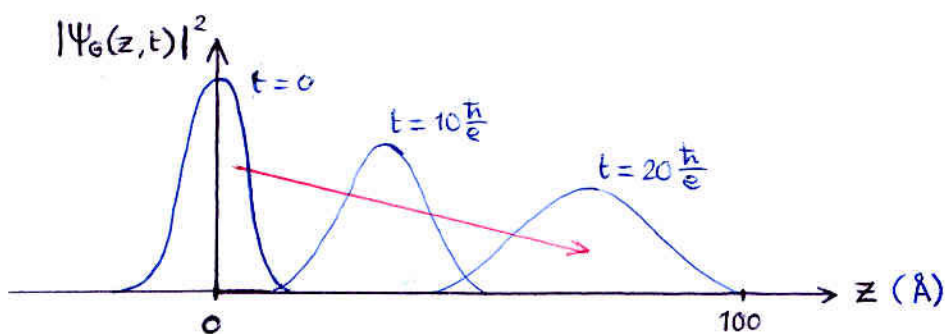
Paquetes de onda propagándose a una velocidad de grupo corresponde a la velocidad que esperaríamos en la partícula clásica con la misma energía.

## → PAQUETE DE ONDAS GAUSSIANO

Combinación lineal de autovalores de la ecuación de Schrödinger de la forma:

$$\Psi_G(z, t) \propto \int_k \underbrace{e^{-\frac{k-\bar{k}}{2\Delta k^2}}}_{\text{coeficientes } c(k)} \underbrace{e^{-i(\omega(k)t - kz)}}_{\Psi_k} dk$$


El aspecto de la densidad de probabilidad  $|\Psi_G(z, t)|^2$  es un paquete de ondas Gaussiano que se propaga hacia la derecha linealmente a la vez que se ensancha



• Ensanchamiento del paquete Gaussiano:

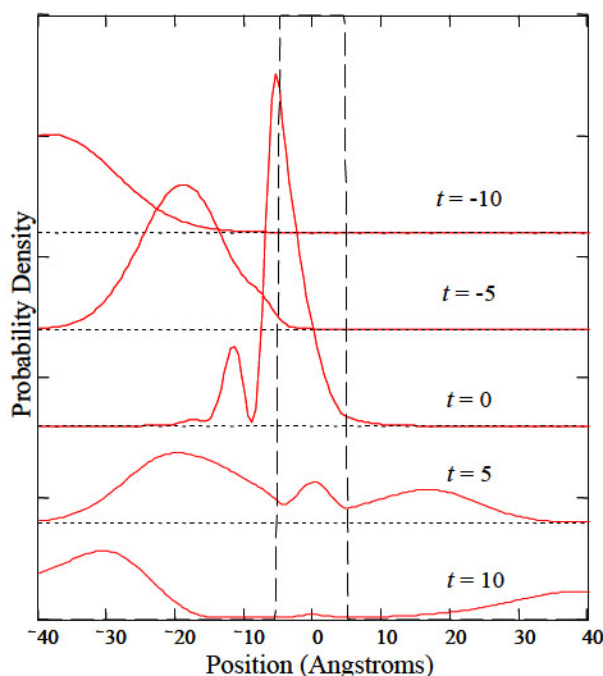
Dispersión de velocidad de grupo = distintas  $v_g$  para distintas componentes

$$\frac{dv_g}{dk} = \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{\hbar}{m_0}$$

## → PAQUETE DE ONDAS INCIDE EN UNA BARRERA DE POTENCIAL

- Paquete de ondas incide por la izquierda
  - ↳ reflexión de parte hacia la izquierda
  - ↳ el resto penetra en la barrera: ondas forward y backward en la barrera
  - ↳ transmisión a la derecha de la barrera

se puede escribir como superposición de paquetes gaussianos





# MEDIDAS EN MECÁNICA CUÁNTICA → COLAPSO DE LA FUNCIÓN DE ONDA

Expansión en coeficientes de una función de onda

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n C_n(t) \cdot \psi_n(\vec{r})$$

$$\sum_n |C_n|^2 = 1$$

base ortonormal

autofunciones de un operador de medida

↳ posición:  $\hat{x} = x$

↳ momento:  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

↳ energía:  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

ó  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t)$

Los operadores que se asocian a medidas son hermiticos: sus autovalores (que son la magnitud que se mide) son reales.

Al realizar una medida, el sistema colapsa a una de sus autofunciones del operador de la medida, con una probabilidad

$$P_n = |C_n|^2$$

El colapso de una función de onda es un fenómeno difícil de asumir; no es más que una observación empírica de lo que ocurre cuando sistemas grandes hacen medidas sobre sistemas pequeños.

Las dificultades que implica aún hoy día se siguen intentando solucionar. La rama de la mecánica cuántica que estudia el Problema de la Medida se llama MEASUREMENT THEORY

ejemplo: medida de la energía de un estado coherente del oscilador armónico.

Recuerda: Estado coherente →  $\psi_N(\xi, t) = \sum_n \underbrace{\left[ \underbrace{\sqrt{\frac{N^n e^{-N}}{n!}}}_{C_{nN}} \cdot e^{-i \underbrace{\left[n + \frac{1}{2}\right] \omega_0 t}_{\omega_n}} \right]}_{C_n(t)} \cdot \psi_n(\xi)$

↑  
autofunciones del operador energía asociados a los autovalores

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

- Al realizar una medida de la energía de este sistema, se obtendrá un valor  $E_n$  con una probabilidad  $|C_n(t)|^2$ , y la función de onda colapsará a  $\psi_n(\xi)$ .
- La medida de la energía no es determinista, pero podemos obtener el valor esperado que se obtendría al promediar varias medidas:

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n \cdot P_n$$

$$= \sum_n E_n \cdot |C_n|^2$$

$$= \sum_n \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \right] \cdot \left[ \frac{N^n e^{-N}}{n!} \right] = \frac{1}{2} \hbar \omega + \hbar \omega \left[ \sum_n n \frac{N^n e^{-N}}{n!} \right]$$

$$= \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

media de la distrib. de Poisson  
 $\sum_n n \cdot P_{n,N} = N$

# CORRIENTE DE PARTICULAS

- Problema: Existen estados estacionarios (i.e. la densidad de probabilidad no varía con el tiempo) en los cuales la energía total excede a la energía potencial (i.e. tienen energía cinética). Pero la intuición clásica nos dice que la energía cinética va asociada a partículas en movimiento ¿cómo es posible que el estado sea estacionario?
- Solución: Podemos definir la corriente en la densidad de probabilidad, llamada PARTICLE CURRENT  $\vec{j}_p$  tal que:

$$\frac{\partial |\psi(\vec{r}, t)|^2}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{j}_p$$

$|\psi|^2$  densidad de partículas  
Flujo saliente de corriente de partículas

Tras álgebra y sustituciones se llega a:

$$\vec{j}_p = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \cdot \nabla \psi^* - \psi^* \cdot \nabla \psi)$$

válido cuando el potencial no depende del tiempo (Ec. de Schö. indep. del tiempo)

- Si aplicamos la definición a una autofunción de la energía, que será un estado estacionario:

$$\vec{j}_p = \frac{i\hbar}{2m} (\psi_n(\vec{r}, t) \nabla \psi_n^*(\vec{r}, t) - \psi_n^*(\vec{r}, t) \nabla \psi_n(\vec{r}, t))$$

con  $\psi_n(\vec{r}, t) = e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \cdot \psi_n(\vec{r})$

se ve que los términos temporales desaparecen al multiplicar complejos conjugados

$$\vec{j}_p = \frac{i\hbar}{2m} (\psi_n(\vec{r}) \nabla \psi_n^*(\vec{r}) - \psi_n^*(\vec{r}) \nabla \psi_n(\vec{r}))$$

que no depende del tiempo.

Para cualquier energy eigenstate se tiene que:

$$\vec{j}_p(\vec{r}, t) = \vec{j}_p(\vec{r}) \longleftrightarrow$$

La corriente de partículas es CONSTANTE en cualquier ENERGY EIGENSTATE



Una corriente constante NO RADIA energía electromagnética

Así se soluciona el problema clásico del electrón orbitando el núcleo de hidrógeno.



Clásico: el electrón dando vueltas es una corriente que varía, por tanto radia energía

↳ no coincide con los experimentos

corriente NO NULA pero constante



✓ Cuántico: el electrón es una "nube" alrededor del núcleo que sí presenta una "densidad de corriente de partícula" alrededor del átomo, pero CONSTANTE, y por tanto no radia.



# TEORÍA FORMAL DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

A continuación vemos los postulados de la física cuántica: Los conceptos que los sacerdotes, que son los profesores de física, nos imponen. Conceptos imposibles de conciliar con la intuición, que debemos creer con fe ciega, con la única e implacable justificación de que todas sus predicciones coinciden con absolutamente todos los experimentos que jamás se han hecho.



- Postulado 1: Para todo sistema dinámico, existe una función de onda  $\Psi$  continua, cuadrado-integrable, single-valued, función de las coordenadas de todas las partículas y del tiempo, de la cual todas las predicciones acerca de las propiedades físicas del sistema pueden obtenerse.
- Postulado 2a: Todo observable se representa con un Operador Lineal Hermítico
- 2b: Los autovalores del operador Lineal Hermítico son todos los posibles resultados que se pueden obtener cuando se mide la cantidad física correspondiente al operador.

- Postulado 3: Los dos operadores básicos son:

Posición:  $\hat{\vec{r}} = \vec{r}$

Momento:  $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$

El resto de operadores pueden obtenerse con las analogías de la mecánica clásica:

Energía cinética:  $K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Energía total (Hamiltoniano):  $H = K + V \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

Momento angular:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{L}} = i\hbar \vec{r} \times \nabla$

- Postulado 4a: Cuando se realiza la medida de un observable  $Q$  sobre una función de onda normalizada  $\Psi$ , la probabilidad de obtener el autovalor  $q_n$  viene dado por el módulo al cuadrado de la integral de solapamiento
- $$|a_n|^2 \quad \left[ \begin{array}{l} \psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x) \\ a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \psi(x) dx \end{array} \right.$$

- 4b: Inmediatamente tras la medida, la función de onda es la autofunción  $\phi_n$  del operador que corresponde al autovalor que acaba de obtenerse como resultado

- Postulado 5: En el tiempo entre medidas (i.e. sin influencias externas) la función de onda evoluciona temporalmente de acuerdo a la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

$$\left[ \begin{array}{l} \psi(x,t) = \sum_n a_n(t) \cdot \phi_n(x) \\ a_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \psi(x,t) dx \end{array} \right.$$



## • CONMUTADORES

Si aplico primero un operador y luego otro a una función de onda.  
¿Importa el orden en que los aplique?

$$\hat{Q}[\hat{R}[\psi]] \text{ vs. } \hat{R}[\hat{Q}[\psi]]$$

A la diferencia entre ambos se le llama el CONMUTADOR

$$[\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q}$$

Se dice que dos operadores CONMUTAN cuando su conmutador es nulo.

En general, el resultado no es el mismo:

ejemplo: posición y momento

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi = x(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\hat{p}_x\hat{x}\psi = (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})x\psi = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\hbar\psi$$

ejemplo: posición y momento

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

ejemplo: todo operador conmuta consigo mismo

$$[\hat{x}, \hat{x}] = 0$$

## • OPERADORES COMPATIBLES

Dos operadores son compatibles si comparten las autofunciones (pero no necesariamente los autovalores)

$$\hat{Q} \cdot \psi = q_n \phi_n$$

$$\hat{R} \cdot \psi = r_n \phi_n$$

↑ mismas autofunciones

conclusión: Dos observables compatibles pueden tener valores precisos definidos simultáneamente.

← Por tanto podrían realizarse múltiples medidas seguidas de  $\hat{Q}$  y  $\hat{R}$ , y siempre se obtendría el mismo resultado  $q_n$  y  $r_n$  respectivamente, asociadas a la autofunción  $\phi_n$  a la que  $\psi$  colapsó en la PRIMERA MEDIDA  
( $\psi$  no colapsa en todas las siguientes medidas, o colapsa a sí misma con probabilidad 1)

$\hat{Q}$  y  $\hat{R}$  son operadores compatibles

$$\hat{Q} \cdot \psi = q_n \phi_n$$

$$\hat{R} \cdot \psi = r_n \phi_n$$



$\hat{Q}$  y  $\hat{R}$  conmutan

$$[\hat{Q}, \hat{R}] = 0$$

ejemplo:  
posición en  $x$ :  $x$   
momento en  $y$ :  $p_y$   
 $[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$   
Pueden conocerse simultáneamente

## • PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Dos observables  $q$  y  $r$  no pueden tener simultáneamente valores definidos con mayor precisión que:

$$\Delta q \cdot \Delta r \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{Q}, \hat{R}] \rangle|$$

siendo  $\Delta q$  y  $\Delta r$  las desviaciones rms  
 $(\Delta q)^2 = \langle (q - \bar{q})^2 \rangle$

Toda la física cuántica es posible gracias a que la posición y el momento no conmutan

ejemplo: posición y momento en  $x$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| = \frac{1}{2} |i\hbar|$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$



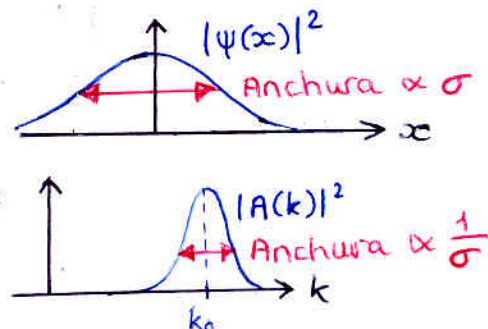
## PAQUETES DE ONDA Y EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

El paquete gaussiano es la mejor forma de ver un sistema cuántico como una partícula clásica, localizada tanto en el espacio como en el momento. Recuerda: la transformada de Fourier de una gaussiana es también una gaussiana.

$$\psi(x) \propto e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \rightarrow |\psi(x)|^2 \propto e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

↓ TF

$$A(k) \propto e^{-\sigma^2(k-k_0)^2} \rightarrow |A(k)|^2 \propto e^{-2\sigma^2(k-k_0)^2}$$



- Está localizado en el espacio con una anchura a 1/e de  $\Delta x = \sqrt{2} \sigma$
- Está localizado en el momento con una anchura a 1/e de  $\Delta p = \hbar \cdot \Delta k = \hbar \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \sigma}$
- El producto de las anchuras es constante :  $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$
- Si se usara anchura rms en lugar de 1/e :  $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$



El paquete Gaussiano es un paquete de incertidumbre mínima.

## TRES FORMAS DE VER EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

- (1): Es consecuencia de la perturbación inevitable (colapso de la función de onda) causada por la medida
- (2): Nace a partir de la propiedad de la transformada de Fourier (paquetes de onda espacialmente estrechos necesitan una gran anchura de vectores de onda, y viceversa)
- (3): Como consecuencia fundamental de que  $x$  y  $p$  no son cantidades compatibles, sus operadores hermíticos no conmutan, no comparten autovalores, y por lo tanto no pueden tener valores definidos simultáneamente.

# EVOLUCION DE LOS VALORES ESPERADOS

$$\delta_{nm} = \delta_{mn}$$

Recuerda que el resultado esperado de una medida es:

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi dx = \sum_n q_n \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_n|^2 dx$$

$\psi = \sum a_n \phi_n$   
 $\hat{Q}\psi = \sum a_n \hat{Q}\phi_n = \sum a_n q_n \phi_n \rightarrow \hat{Q}\phi_n = q_n \phi_n$

Es todo lógico una vez se abarca

Por tanto, para una función de onda que varía con el tiempo:

$$\langle Q(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)^* \hat{Q} \psi(x,t) dx$$

¿cuál es la derivada del valor esperado de un observable?

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} \int \psi(x,t)^* \hat{Q} \psi(x,t) dx \\ &= \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{Q} \psi + \psi^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \psi + \psi^* \hat{Q} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx \end{aligned}$$

regla de la cadena

$$i\hbar \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \int \underbrace{i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t}}_{-\hat{H}\psi^*} \hat{Q} \psi dx + \int \psi^* \hat{Q} \underbrace{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}}_{\hat{H}\psi} dx + i\hbar \int \psi^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \psi dx$$

Ec. de Schrödinger:  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$

$$= \int \underbrace{\psi^* \hat{Q} \hat{H} \psi - \psi^* \hat{H} \hat{Q} \psi}_{\psi^* [\hat{Q}, \hat{H}] \psi} dx + i\hbar \langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \rangle$$

Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \rangle$$

Permite obtener la variación del valor esperado de un operador en función de su conmutador con el Hamiltoniano (i)

→ Conservación de la energía:

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{H}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \rangle = 0$$

el operador energía es el Hamiltoniano  
 $\hat{H}$  no depende de  $t$

A pesar de que la energía de un sistema no es determinista, el PROMEDIO de la energía se conserva con el tiempo

→ Obtención de las relaciones clásicas de Newton

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{x}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \rangle \\ &= \langle -\frac{i\hbar}{m} \frac{d}{dx} \rangle \end{aligned}$$

$\langle \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \rangle = 0$   
 $[\hat{H}, \hat{x}] = [-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), x] = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2 \frac{d}{dx}$   
 $[A+B, C] = [A, C] + [B, C]$   
 $[V(x), x] = 0$   
 $[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x] = 2 \frac{d}{dx}$

$$\boxed{\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle \frac{p_x}{m} \rangle} \rightarrow \boxed{\langle p_x \rangle = m \cdot \frac{d\langle x \rangle}{dt}}$$

la mecánica clásica se refiere en realidad a PROMEDIOS!!

y también se puede demostrar  $\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = -\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle$



# SESIÓN 3 : FOTONES COMO OSCILADORES ARMÓNICOS. REPRESENTACIÓN POR ESTADO DE NÚMERO DE FOTONES COMPUTACIÓN CUÁNTICA. TELEPORTACIÓN.

## LA LUZ COMO OSCILADOR ARMÓNICO CLÁSICO

Oscilador armónico clásico masa  $m$  y freq  $\omega_0$



$$\begin{aligned} p_x &\equiv m\dot{x} \\ m\ddot{x} &= \dot{p}_x \\ &= -m\omega_0^2 x \end{aligned}$$

Solución:

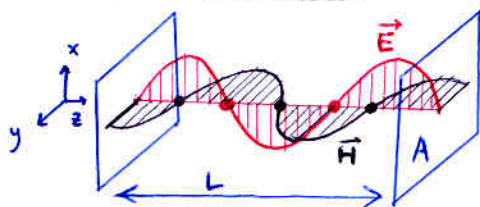
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin \omega_0 t \\ p(t) &= p_0 \cos \omega_0 t \quad \text{con } p_0 = m\omega_0 x_0 \end{aligned}$$

Energía:

$$E_{\text{sho}} = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m}}_{\text{cinética}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2}_{\text{potencial}}$$

la energía oscila entre una y otra

Analogía con los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en una cavidad



Desfasados 90° igual que el momento y la posición.

$$E_x(z, t) = E_0 \sin kz \sin \omega t$$

$$\downarrow \text{ ec. Maxwell } -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$B_y(z, t) = B_0 \cos kz \cos \omega t$$

$\uparrow B_0 = \frac{E_0}{c}$

Curioso que en una onda plana no están desfasados



$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B &= B_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

El resonador SEPARA el espacio y el tiempo  $\sin(kx)\sin(\omega t)$  y hace que se desfasen

• la densidad de energía en la cavidad

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

• Integrando para obtener la energía en todo  $V$

$$E_{\text{electric}} = \frac{1}{4} \epsilon_0 V E_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$E_{\text{magnetic}} = \frac{1}{4\mu_0} V B_0^2 \cos^2 \omega t$$

La energía total:

$$E = \frac{V}{4} (\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{B_0^2}{\mu_0} \cos^2 \omega t) \quad \text{¡la energía oscila entre una y otra!}$$

La analogía con la posición y el momento es total si definimos las magnitudes

$$\begin{aligned} q(t) &\propto E_x(t) \rightarrow q(t) = \left(\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2}\right)^{1/2} E_0 \sin \omega t \\ p(t) &\propto B_y(t) \rightarrow p(t) = \left(\frac{V}{2\mu_0}\right)^{1/2} B_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} p &= \dot{q} \\ \dot{p} &= -\omega^2 q \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

El campo eléctrico es análogo a la posición.  
El campo magnético es análogo al momento

$$E(t) \rightarrow q(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{m}}$$

$$B(t) \rightarrow p(t) = \sqrt{m} \dot{x}(t)$$

La posición determina la energía potencial. El campo eléctrico determina la energía eléctrica

el momento determina la energía cinética. El campo magnético determina la energía magnética.

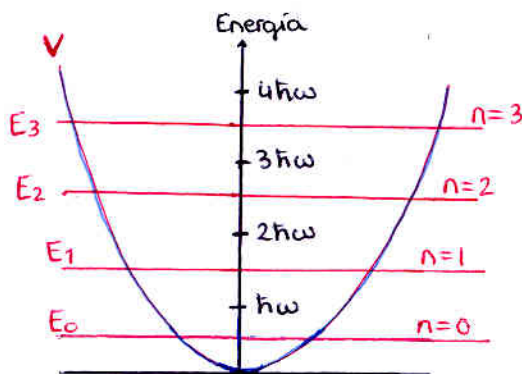
También es típico utilizar otro par de funciones equivalentes

$$X_1(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} q(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}} E_0 \sin(\omega t) \quad \text{componentes fase y cuadratura adimensionales}$$

$$X_2(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}} E_0 \cos(\omega t)$$

Las energías se van intercambiando dando lugar a la oscilación

# LA LUZ COMO OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO



Vimos que un oscilador armónico tiene en realidad niveles de energía cuantizados

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

Y que la posición y el momento satisfacen el principio de incertidumbre de Heisenberg.

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

¿cómo se traduce esto en el resonador electromagnético?

- El nivel de energía  $E_n$  significa que el oscilador tiene  $n$  fotones oscilando a frecuencia  $\omega$ .

Curiosamente, aunque haya cero fotones, existe una energía  $\frac{1}{2}\hbar\omega$

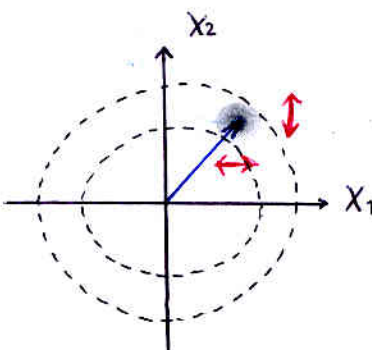
- El principio de incertidumbre implica que la amplitud de  $E(t)$  y  $B(t)$  tiene cierta incertidumbre.

Si expresamos los campos con componentes en fase y cuadratura adimensionales se puede deducir que

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{2\hbar} \underbrace{\Delta q \Delta p}_{\Delta x \Delta p_x} \geq \frac{1}{4}$$

Se traduce en

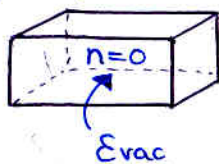
- incertidumbre en la fase
- incertidumbre en la amplitud



## EL CAMPO EN VACÍO

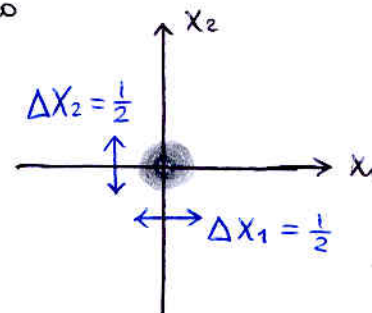
Aún para cero fotones en el resonador electromagnético, existe una cierta energía y por tanto existe amplitud de campo eléctrico

Cavidad de volumen  $V$  sin ninguna fuente de energía:



Se excitan CERO fotones, pero existe un campo eléctrico

También es lógico si se ve como una incertidumbre alrededor de cero



tal que su energía es  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ .

$$2 \times \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{vac}^2 dV = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \Rightarrow E_{vac} = \left( \frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 V} \right)^{1/2}$$

- Sirve para explicar la emisión espontánea como emisión estimulada por  $E_{vac}$

se puede demostrar midiendo experimentalmente la pequeñísima fuerza que el campo ejerce sobre las paredes conductoras

$$F_{Casimir} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 L^4} \leftarrow \text{crece para distancias pequeñas}$$



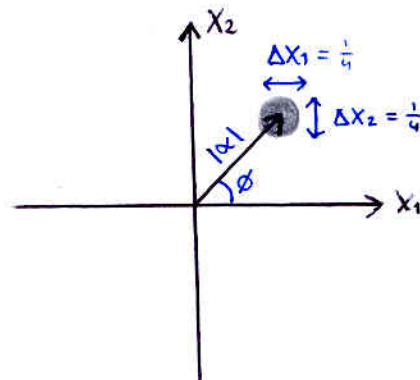
# ESTADOS COHERENTES : El equivalente mecánico-cuántico a la onda electromagnética monocromática clásica

Los estados coherentes de un resonador electromagnético se definen con un número complejo; en notación de Dirac  $|\alpha\rangle$

$$\alpha = |\alpha| e^{i\varphi} \\ = X_1 + iX_2$$



$$|\alpha| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \\ X_1 = |\alpha| \cos \varphi \\ X_2 = |\alpha| \sin \varphi$$



El estado coherente es el estado de mínima incertidumbre.

Es decir

$$\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 = \frac{1}{2}$$

↑  
el menor posible

Sabiendo que :

$$X_1(t) = \left(\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}\right)^{1/2} E_0 \sin \omega t \\ X_2(t) = \left(\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}\right)^{1/2} E_0 \cos \omega t$$

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}} E_0$$

amplitud del campo eléctrico

La energía clásica en el volumen V

$$E_{\text{clásica}} = \frac{V}{4} \epsilon_0 E_0^2 = \hbar\omega |\alpha|^2$$

Comparandola con la energía del oscilador armónico cuántico

$$E_{\text{cuántico}} = \underbrace{\bar{n} \hbar\omega}_{\text{nº medio de fotones}} + \underbrace{\frac{1}{2} \hbar\omega}_{\text{fluctuaciones del campo en vacío}}$$

se obtiene la analogía

$$|\alpha| = \sqrt{\bar{n}}$$

Es decir, que el número medio de fotones en una cavidad de volumen V se deduce de la amplitud del campo eléctrico clásico :

$$\bar{n} = \frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega} E_0^2 = \frac{E_{\text{clásica}}}{\hbar\omega}$$

Además el principio de incertidumbre  $\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{2}$  se traduce en que

$$\Delta n \cdot \Delta \varphi \geq \frac{1}{2}$$

number-phase uncertainty

↑      ↑  
ruido shot de los detectores      ruido de fase

# OSCILADOR ARMÓNICO SOLUCIONADO CON OPERADORES DE NÚMERO

Recuerda el oscilador armónico

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Rightarrow \hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}_x^2}{2m}}_{\text{cinética}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 x^2}_{\text{potencial}}$$

Hay que solucionar  $\hat{H} \psi(x) = E \psi(x)$

Ya lo hicimos en la sesión dos, pero aquí lo solucionaremos haciendo uso de dos nuevos operadores ESCALERA:

Operador creación:  $\hat{a} = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}} (m\omega\hat{x} + i\hat{p}_x)$

Operador aniquilación:  $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{1/2}} (m\omega\hat{x} - i\hat{p}_x)$

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{p} = -i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

$\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  no son hermiticas, por tanto no estan relacionados con observables reales; pero su suma y diferencia son la posición y el momento respectivamente (o E y H si hablamos de luz)

Nos puede recordar a:

$$V = V^+ + V^-$$

$$I = \frac{1}{2}(V^+ - V^-)$$

o tambien a:

$$\text{DFT}[a,b] = [a+b, a-b]$$

Y no es casualidad, puesto que:

$$V, I \sim E, H \sim \hat{x}, \hat{p}_x$$

TF

Jugando matematicamente con las expresiones de arriba se puede deducir directamente lo siguiente:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$\hat{a}$   
 $\hat{a}^\dagger$

$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - \frac{1}{2} \hbar \omega}{\hbar \omega}$ 
 $\hat{a} \hat{a}^\dagger = \frac{\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega}{\hbar \omega}$

$$\hat{H} = \hbar \omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar \omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{1}{2} \right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar \omega \hat{a}^\dagger$$

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar \omega \hat{a}$$

$$\hat{H} \psi_n = E_n \psi_n$$

$$\begin{aligned} \hat{H} \hat{a}^\dagger \psi_n &= \hat{H} \hat{a}^\dagger \psi_n \rightarrow \text{ingenioso} \\ &= (\hat{H} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{H} + \hat{a}^\dagger \hat{H}) \psi_n \\ &= ([\hat{H}, \hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger \hat{H}) \psi_n \\ &= (\hbar \omega \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger E_n) \psi_n \\ &= (\hbar \omega + E_n) \hat{a}^\dagger \psi_n \end{aligned}$$

Si  $\psi_n$  es una autofunción de  $\hat{H}$  con autovalor  $E_n$ , entonces

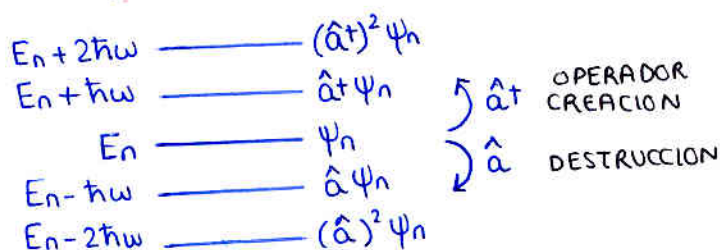
$\hat{a}^\dagger \psi_n$  y  $\hat{a} \psi_n$  tambien lo son, con autovalor  $E_n + \hbar \omega$  y  $E_n - \hbar \omega$  respectivamente

$$\hat{H} \hat{a}^\dagger \psi_n = (E_n + \hbar \omega) \hat{a}^\dagger \psi_n$$

$$\hat{H} \hat{a} \psi_n = (E_n - \hbar \omega) \hat{a} \psi_n$$



Por tanto se puede deducir que las autofunciones de  $\hat{H}$  forman una escalera con energías equiespaciadas  $\hbar\omega$



¿Y que pasa abajo del todo?

Se puede decir que el nivel inferior tendrá energía  $0 \leq E_0 < \hbar\omega$

Y además se cumplirá que  $\hat{a} \psi_0 = 0$   
para evitar energías negativas

por normalización  
 $C = (m\omega/\hbar\pi)^{1/4}$

$$-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)x \cdot \psi_0 = 0 \xRightarrow{\text{solución}} \psi_0(x) = C e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

Y sabiendo de antes se puede deducir la energía de  $\psi_0$

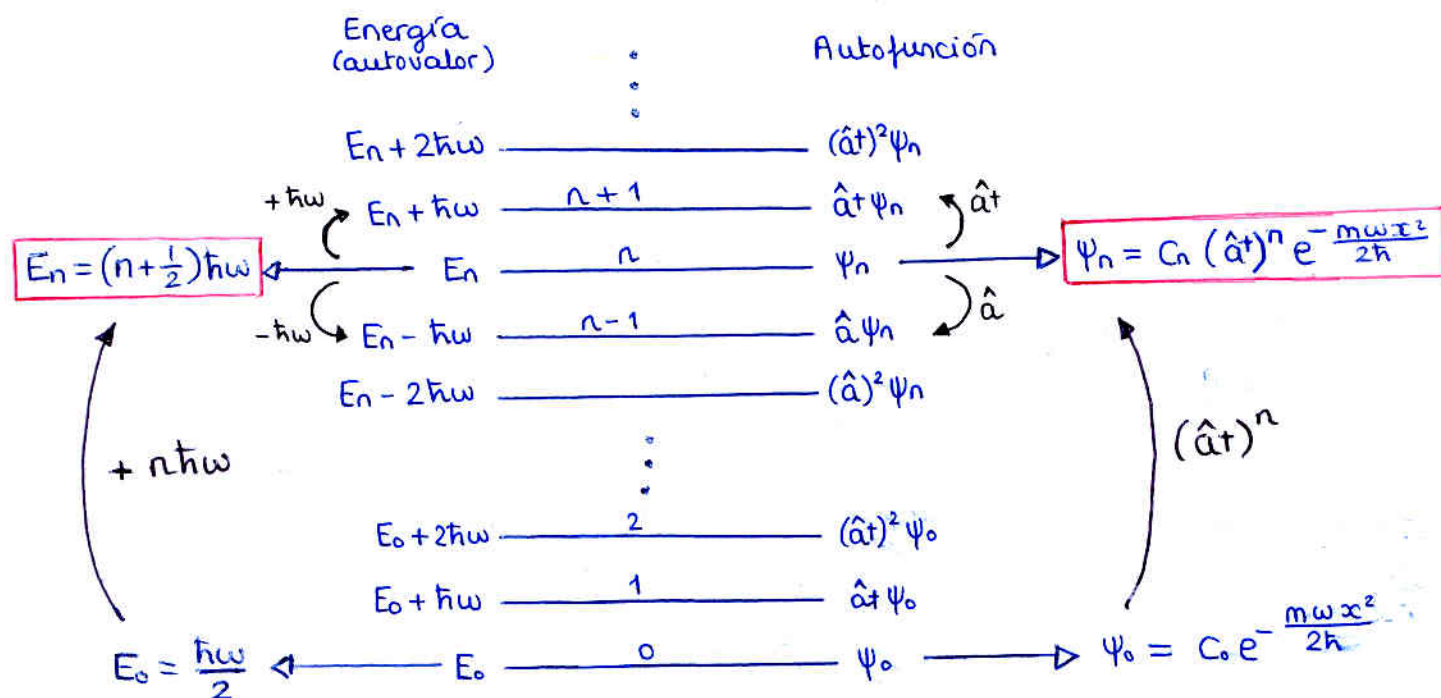
$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) \rightarrow \hat{H} \psi_0 = \hbar\omega\left(\underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a} \psi_0}_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega \psi_0\right) = \frac{1}{2}\hbar\omega \psi_0 \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Y cualquier otra autofunción puede obtenerse a partir de la primera:  
aplicando  $\hat{a}^\dagger$  n veces

$$\psi_n(x) = C_n (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0(x)$$

con energía  $E_n = E_0 + n\hbar\omega = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

Hemos solucionado totalmente el oscilador armónico simplemente jugando con los operadores  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$



Ademas puede definirse el OPERADOR NÚMERO a partir de  $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \quad \hat{H} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \Rightarrow E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

$$\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\psi_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\psi_n \Rightarrow \text{por comparación, definimos } \hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

En resumen:

OPERADOR CREACIÓN  $\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} B_n |\psi_{n+1}\rangle$  ← por normalización

OPERADOR ANIQUILACIÓN  $\hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n} A_n |\psi_{n-1}\rangle$

OPERADOR NÚMERO  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad \hat{n}|\psi_n\rangle = n\psi_n$

### NUMBER STATE REPRESENTATION

Llamar directamente  $|n\rangle \equiv |\psi_n\rangle$

De forma que se puede escribir:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

y por tanto

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

estado en el cual  
no se excitan  
cuantos

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

y el operador numero

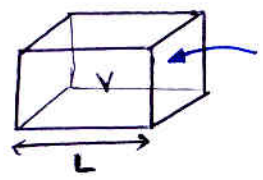
$$\hat{n}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$$



# PHOTON NUMBER STATES

está bien con y sin 'h'

Aplicamos la representación de estados de número del oscilador armónico a un resonador electromagnético de volumen  $V$



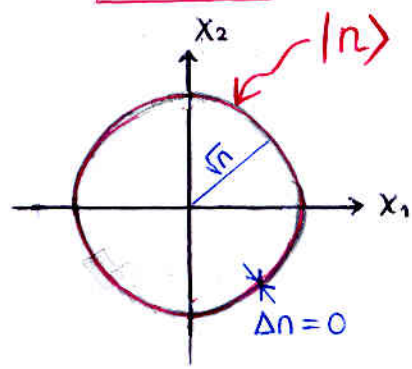
$|n\rangle$  es el estado en el cual se excitar EXACTAMENTE  $n$  fotones en el resonador

No tiene análogo a campos de física clásica  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , puesto que  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son el análogo a los estados coherentes (superposición de estados de número de fotones) en los cuales el número de fotones es aleatorio aunque localizado alrededor de  $\bar{n}$  (valor medio).

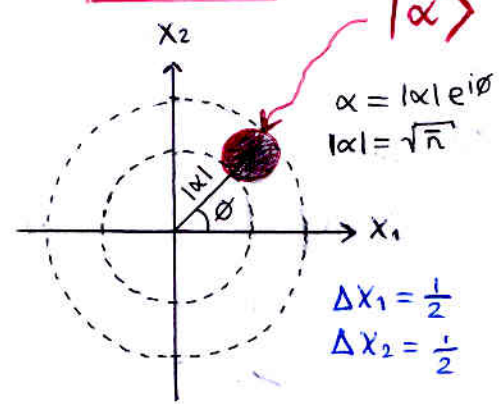
Recuerda que  $\Delta n \cdot \Delta \phi \geq \frac{1}{2}$

Por tanto si el número de fotones está exactamente definido, la fase es totalmente desconocida

## Photon Number State



## Coherent State



El análogo al campo clásico de laser fijo

$\Delta n \cdot \Delta \phi \geq \frac{1}{2}$

Se pueden introducir los operadores

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

Los estados coherentes pueden escribirse como superposición de estados de número de fotones

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Con la expresión de estados coherentes en función de una superposición de estados de número de fotones

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

se pueden deducir muchos resultados:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle \text{ es un autoestado del operador aniquilación } \hat{a} \text{ con autovalor } \alpha \text{ (no real, puesto que } \hat{a} \text{ no es hermítico y no corresponde a un observable)}$$

Además permite obtener el número medio de fotones

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \underbrace{\langle \alpha | \hat{a}^\dagger}_{\alpha^*} \underbrace{|\alpha \rangle}_{\alpha} = |\alpha|^2$$

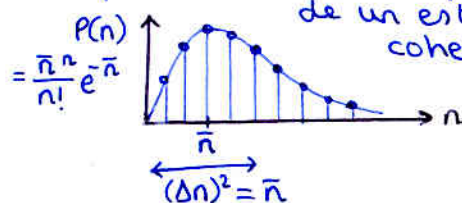
Recuerda, ya sabíamos que:

$$|\alpha|^2 \equiv \frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega} \mathcal{E}_0^2 = \frac{E_{\text{clásica}}}{\hbar\omega}$$

y permite calcular la incertidumbre en el nº de fotones:

$$(\Delta n)^2 = \langle \alpha | (\hat{n} - \bar{n})^2 | \alpha \rangle = \bar{n}$$

↳ Este resultado corresponde con una estadística Poissoniana para el número de fotones de un estado coherente



Nota: curiosamente, la estadística de Poisson es el equivalente discreto (con  $n \in \mathbb{N}$ ) de una estadística Gaussiana ( $x \in \mathbb{R}$ )

Dem:

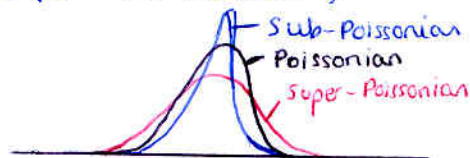
$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &= \langle \alpha | (\hat{n} - \bar{n})^2 | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle - 2\bar{n} \underbrace{\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle}_{\bar{n}} + \bar{n}^2 \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_1 \\ &= \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle - \bar{n}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{n}^2 &= \hat{n}\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger ([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger (1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} | \alpha \rangle - \bar{n}^2 \\ &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} | \alpha \rangle - \bar{n}^2 \\ &= \alpha^* \alpha + \alpha^* \alpha^* \alpha \alpha - \bar{n}^2 \\ &= \bar{n} + \bar{n}^2 - \bar{n}^2 \\ &= \bar{n} \end{aligned}$$

Clasificación de la luz según estadística

$$\begin{aligned} \Delta n &> \sqrt{\bar{n}} : \text{super-Poissonian} \\ \Delta n &= \sqrt{\bar{n}} : \text{Poissonian} \\ \Delta n &< \sqrt{\bar{n}} : \text{sub-Poissonian} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{classical} \\ \\ \text{non-classical} \end{array}$$





# SPIN



- El spin es una propiedad intrínseca de las partículas elementales.  
Es una propiedad mecánico-cuántica que No tiene análogo clásico, pero se puede intentar relacionar con la rotación de la partícula.  
El spin es muy importante: determina el comportamiento magnético de los materiales, y además determina si mas de una partícula pueden ocupar un mismo estado (principio de exclusión de Pauli).

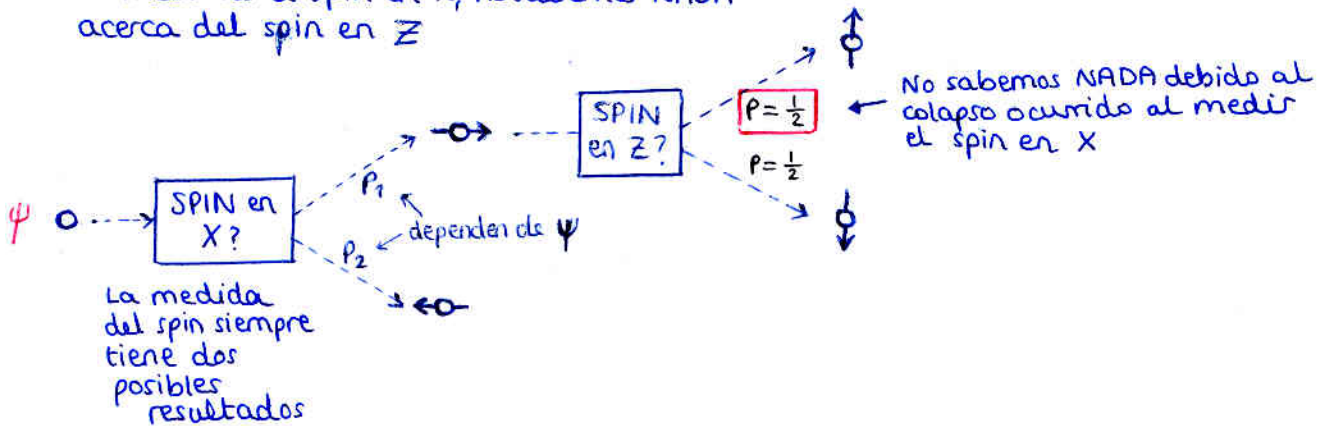
- El spin tiene un operador para cada dirección del espacio  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$  y además los diferentes operadores son complementarios y no compatibles

Una partícula No puede tener definido el spin en dos direcciones distintas simultáneamente

A diferencia del operador momento en distintas direcciones  
 $[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0$

similar al operador momento angular  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$

- Si medimos el spin en X, no sabemos NADA acerca del spin en Z



## PARADOJA EPR

Einstein, Podolsky y Rosen escribieron en 1935 un artículo tratando de demostrar que la física cuántica era errónea mostrando una paradoja.

La paradoja consiste en: partiendo de un llamado "singlet state" o "EPR state" que es un estado en el que dos partículas tienen forzosamente spins opuestos, como ocurre por ejemplo para los dos electrones de un átomo de Helio.

Si separamos ambas partículas: una llamada L y la otra R, el spin de cada una de las partículas es desconocido, la partícula L podría tener un spin u otro con una probabilidad del 50% (su función de onda es una superposición de los dos estados). Sin embargo lo que está claro es que el spin de R debe ser opuesto al de L, por tanto si se mide el spin de L y se colapsa la función de onda, automáticamente colapsa también la función de onda de R al spin opuesto, independientemente de lo lejos que estén!!

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |L\uparrow\rangle |R\downarrow\rangle + |L\downarrow\rangle |R\uparrow\rangle ]$$





- Se puede medir el spin X y el spin Z de la partícula R sin tocarla! según EPR esto implica que R ya tenía valores para el spin X y spin Z simultáneamente  $\rightarrow$  predeterminados, contradiciendo así la física cuántica (R tiene spin X y Z simultáneo)
- "Si podemos predecir con certeza el valor de alguna cantidad física de un sistema SIN ALTERAR el sistema, entonces dicha cantidad física tiene REALIDAD FISICA" Einstein, Podolsky y Rosen, 1935

- La respuesta de Bohr fue que los dos experimentos (medir spin X y spin Z de L sin tocar R) son experimentos complementarios que no pueden realizarse a la vez. Por tanto al escoger hacer uno u otro, se está modificando la situación de R (a pesar de estar muy lejos) y no se pueden hacer simultáneamente.
- EPR entonces argumentar por el "realismo local", que implica que el mundo puede separarse en piezas que actúan independientemente, y que por tanto R es independiente de lo que se le haga a L.
- John Bell en 1964 hizo entonces un descubrimiento realmente profundo. Demostró que si el "realismo local" fuese cierto, entonces se cumpliría siempre una cierta inecuación  $\langle Q \rangle \leq 2$ . Sin embargo se conocen teórica y experimentalmente partículas 'entangled' con una  $\langle Q \rangle = 2.8$ , demostrando así que:

**El realismo local NO ES CORRECTO en el mundo físico**

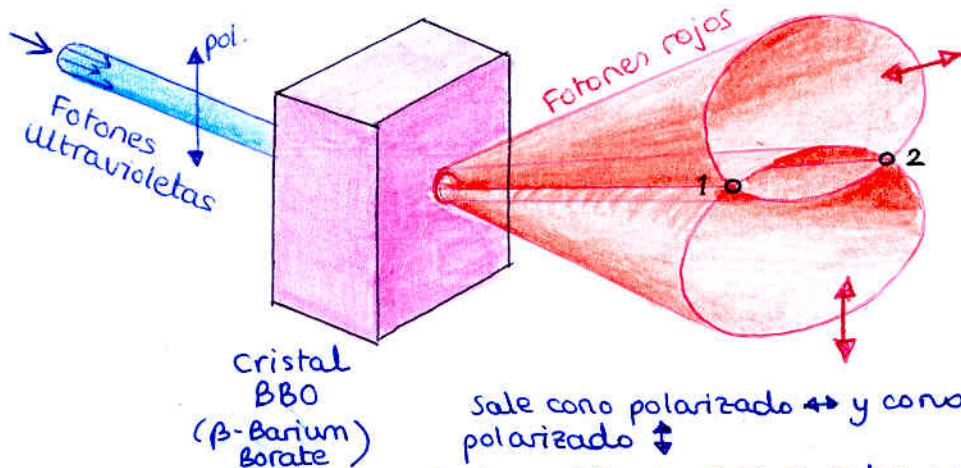
"state space dimensionality"

Resolviéndose así la paradoja EPR: Einstein estaba equivocado.

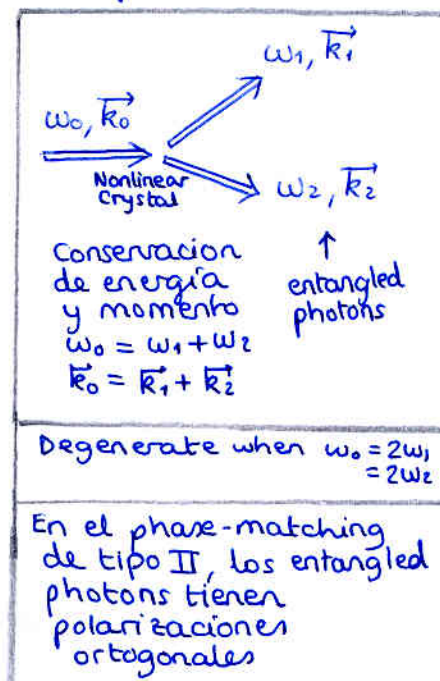
### ENTANGLED PHOTONS

Se puede reproducir la paradoja EPR con la polarización de dos fotones en lugar del spin de dos electrones.  
El montaje es el siguiente

- Degenerate down-conversion with type II phase-matching



- En los puntos 1 y 2 no se sabe qué polarización tiene cada fotón, pero se sabe que es ORTOGONAL





## PROCESADO CUÁNTICO DE LA INFORMACIÓN

Tiene 3 ramas principales que veremos brevemente:

- Criptografía cuántica: intercambio seguro de información
- Computación cuántica: para aumentar el poder computacional
- Teleportación cuántica: transferencia de estados cuánticos entre estaciones remotas

## CRIPTOGRAFÍA CUÁNTICA

Objetivo:

quantum  
key  
Distribution

Transmisor  
ALICE

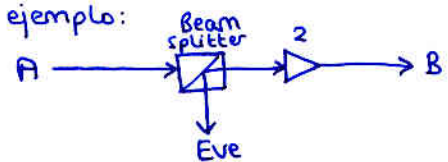


- Transmitir una clave secreta entre ALICE y BOB
- Detectar la presencia de un posible EVE gracias a las leyes básicas de la física cuántica
- una vez intercambiada la clave privada, ALICE y BOB pueden tx por un canal público encriptando la información.

### Teorema de no-clonación cuántica

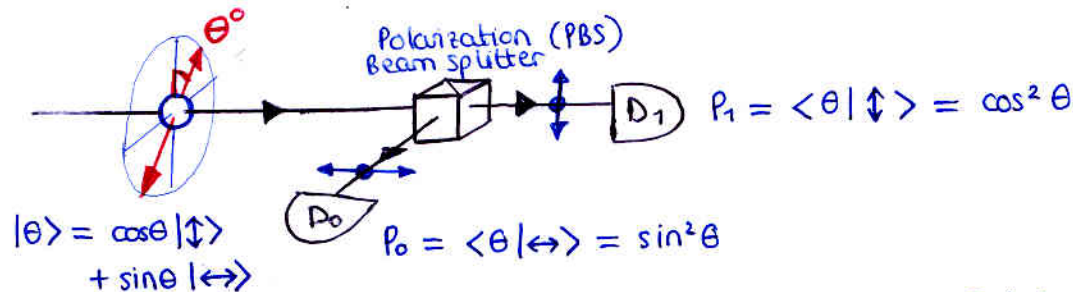
- En física clásica, nada impide que Eve reciba lo que está enviando Alice y transmita una copia idéntica a Bob.
- En física cuántica no se puede detectar un fotón, extraer la información cuántica que lleva, y transmitir una copia cuántica exacta del primero. Eve está obligado a realizar medidas sobre el fotón, y por tanto modificar su estado cuántico.

ejemplo:



### Polarización de los fotones

- Se transmite la información en la polarización de los fotones:
- Para la detección se usa el montaje:



Llega un fotón  
con polarización  $\theta$

un separador de polarizaciones a  $0^\circ$  y  $90^\circ$  dirige el fotón hacia  $D_0$  o hacia  $D_1$  con una probabilidad de  $\sin^2\theta$  o  $\cos^2\theta$  respectivamente.

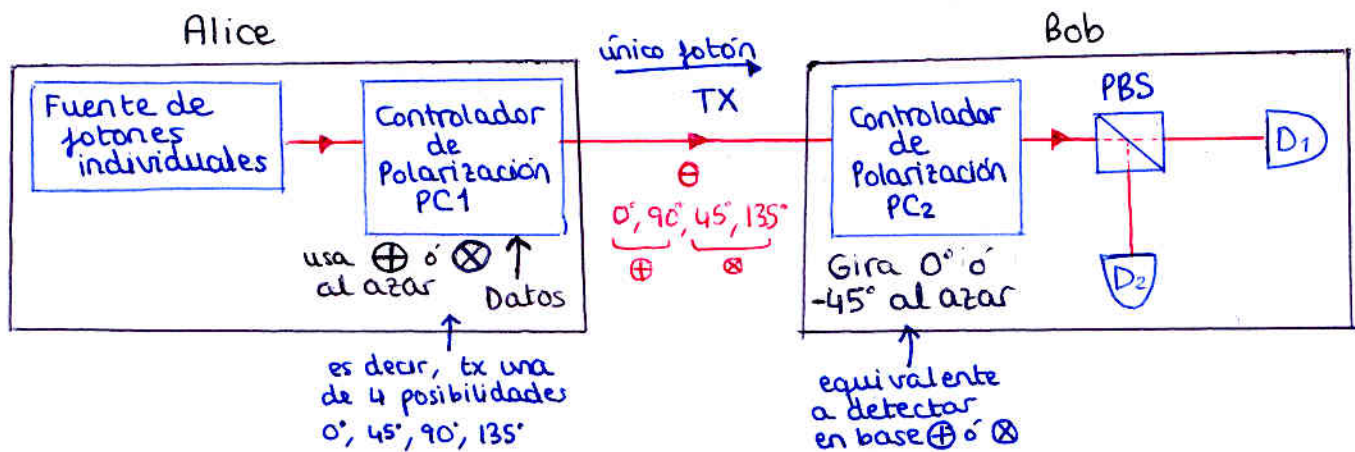
- Si el transmisor usa dos polarizaciones  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_0 = 90^\circ$  alineadas con el beam splitter, entonces el receptor sabe con un 100% de seguridad cual se transmitió.
- Si el transmisor usa dos polarizaciones  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_0 = 135^\circ$  rotadas  $45^\circ$  respecto a las del beam splitter, entonces el receptor recibe con un 50% de probabilidad en cada receptor y no puede saber qué se transmitió.



## • El protocolo BB84

utiliza dos bases distintas para la información

	1 Binario	0 Binario
Base $\oplus$	$ \uparrow\rangle$ $\theta = 0^\circ$	$ \leftrightarrow\rangle$ $\theta = 90^\circ$
Base $\otimes$	$ \nearrow\rangle$ $\theta = 45^\circ$	$ \searrow\rangle$ $\theta = 135^\circ$



1. Alice envía sus bits alternando aleatoriamente entre las bases  $\oplus$  y  $\otimes$
2. Bob recibe los fotones usando la base de detección  $\oplus$  ó  $\otimes$  aleatoriamente
  - ↳ en el 50% de los bits coincidirá la base y se recibirá bien el bit
  - ↳ en el otro 50% de bits utilizará la base incorrecta y por tanto recibirá aleatoriamente los bits (por tanto el 50% de ellos estará bien)
3. Bob responde a Alice (por canal público) qué base de detección utilizó en cada bit (sin decirle los resultados medidos)
4. Alice le dice a Bob (por canal público) en qué bits escogieron la misma base, por lo que ambos tienen un conjunto de bits supuestamente correctos (sifted bits)
5. Bob responde a Alice (por canal público) un SUBCONJUNTO (obviamente no todas) de los bits supuestamente correctos.
6. Si en efecto Alice comprueba que los bits son correctos (tasa de errores inferior al 25%) ambos saben que la transmisión fue segura y nadie ha realizado medidas sobre los fotones. Entonces pueden utilizar el subconjunto de sifted bits que no han transmitido por canal público como clave secreta.

total bits erróneos 25%

Si un hipotético espía (Eve) mide los fotones durante su transmisión, deberá escoger una base  $\oplus$  ó  $\otimes$  forzosamente para detectarlos, y lo mejor que puede hacer es transmitir a Bob lo que ha detectado (que tendrá un 25% de errores). Por tanto en el paso 6 Alice detectará ese 25% de errores y sabrá que alguien interceptó la comunicación.

El protocolo no evita la interceptación, sólo la detecta.



## Fuentes de un único fotón

- Se requiere que la transmisión sea un único fotón para mayor seguridad

### Fuentes aproximadas:

Usar un láser muy atenuado

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

con  $\bar{n}$  muy bajo

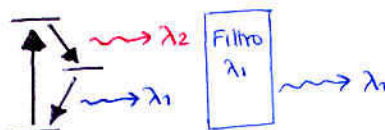
$$P(0) = 0.905$$

$$\text{ej } \bar{n} = 0.1$$

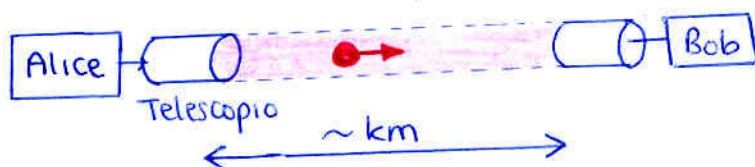
### Fuentes de fotón único:

- único átomo
- única molécula
- único quantum dot

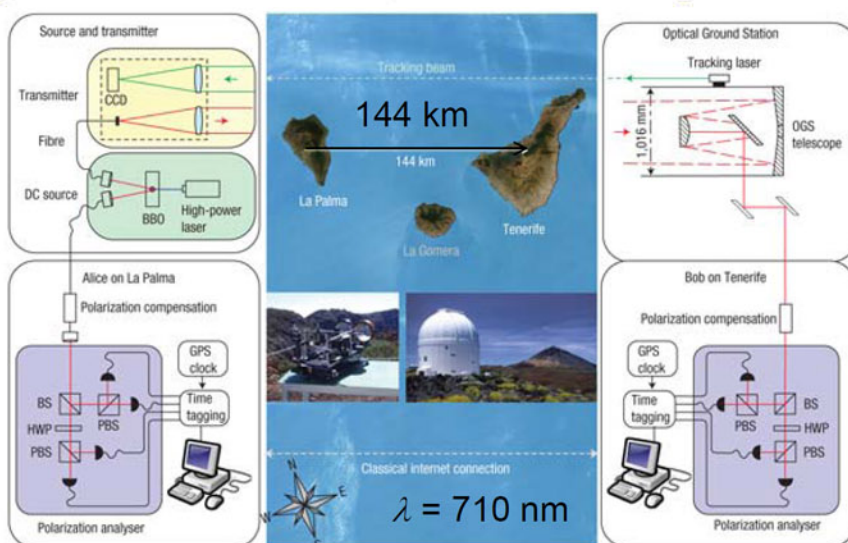
sistema donde  $\psi$  está confinada en las 3 direcciones, y por tanto los vectores de onda están cuantizados en  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$



## Criptografía en espacio libre



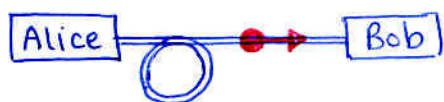
- Estado del arte: 144 km entre La Palma y Tenerife



Ursin et al, Nature Physics, 3, 481 (2007)

- Futuro: Proyecto QUEST de la ESA  
 ↳ (Quantum Entanglement in Space Experiments)  
 Ideal para saber si alguien malversa las transmisiones de y hasta los satélites del sistema Galileo.

## Criptografía en fibras ópticas



Único fotón en la fibra!

- Requiere amplificadores cuánticos
- Problemas por birrefringencia

$\lambda$	:	900nm
pérdidas en fibra	:	altas
detectores	:	SPAD de Si
distancia	:	pocos km
tasa de tx	:	100 kbits/s

$\lambda$	:	1550nm
pérdidas en fibra	:	bajas
detectores	:	SPAD de Ge o InGaAs
distancia	:	>100km
tasa de tx	:	~10 bits/s

Ya existen dispositivos comerciales para distribución cuántica de claves

↳ suficiente para tx claves

# COMPUTACIÓN CUÁNTICA

La evolución temporal de la función de onda  $\psi$  a lo largo de ciertos pasos constituye el algoritmo.

Ventaja:  $\psi$  es en general una superposición de estados, por lo tanto tiene un paralelismo implícito que permite realizar cálculos en paralelo con una misma partícula (ejemplo fotón).

El problema es que al medir el resultante  $\psi$ , éste colapsa a uno de sus estados y se pierde el resto de información. Por eso hay que diseñar cuidadosamente los algoritmos.

ejemplo: Algoritmo de Shor

Algoritmo de computación cuántica que realiza la transformada discreta de Fourier (DFT) con un coste menor

- ↳ Coste clásico:  $\sim N \cdot \log N$  (convierte NP en P!)
- ↳ Coste Shor:  $\sim 2 \log N$

El problema es que el resultado es una función de onda  $\psi$  superposición de  $N$  estados con las amplitudes del resultado de la DFT, por tanto no se pueden medir simultáneamente las  $N$  amplitudes; pero sí se podrían hacer otras cosas como por ejemplo obtener el máximo (hallar periodicidad de una señal)

ejemplo: Algoritmo de Glover

Algoritmo de búsqueda en una base de datos no ordenada

- ↳ Coste clásico  $\sim N/2$
- ↳ Coste Glover  $\sim \sqrt{N}$

Consiste en un circuito cuántico que, dados unos qubits (bits cuánticos) a la entrada, obtiene un estado cuántico a la salida

$$|\psi_2\rangle = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

tamaño  
igual a  
la base  
de datos

coincidencia con la base de datos  
(la posición del 1 indica la posición en la BD)

ejemplo: Algoritmo de Deutsch



El algoritmo permite determinar en un ÚNICO PASO si  $f$  es constante o balanceada

	$f(0)$	$f(1)$	
$f_1$	0	0	} constante
$f_2$	1	1	
$f_3$	0	1	} balanceada
$f_4$	1	0	

ejemplo intuitivo: un ordenador clásico debe mirar una moneda dos veces para ver si los dos lados son diferentes o si está trucada (iguales). un ordenador cuántico mira A LA VEZ ambos lados, con un único paso

↓  
ver detalles  
en Fox 13.5



## • Bits cuánticos (qbits)

ejemplos: • el electrón de un átomo



• la polarización de un fotón



• el spin de un electrón



Desventajas: La información cuántica es muy frágil

- ↳ se requiere unos 12 ordenes de magnitud menos de energía para cambiar entre  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  respecto a los bits clásicos
- ↳ la superposición de estados es muy frágil
- ↳ Hay que aislar las partículas de su entorno

→ Es el gran reto tecnológico para crear un ordenador cuántico

### • Diferencias respecto a bits clásicos:

- No sólo pueden valer  $|0\rangle$  ó  $|1\rangle$  sino una superposición de ambos
- Se cambian al ser medidos
- No pueden copiarse
- No pueden borrarse

### • Superposición de estados cuánticos en qubits

#### • Partícula con spin:

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \psi \end{array} = a \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} + b \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

↑  
números complejos

↓ Medida

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array}$  con prob.  $|a|^2$

$\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$  con prob.  $|b|^2$

Matricialmente:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 \cdot |0\rangle + \alpha_1 \cdot |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

#### • Dos partículas con spin:

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \\ \psi \end{array} = a \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} + b \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} + c \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} + d \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

estados entangled

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$$

Matricialmente:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

### • Evolución temporal:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle \quad \text{forma continua}$$

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle \quad \text{forma discreta}$$

# ALGORITMOS CUÁNTICOS

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$$

$$= U \cdot |\psi(0)\rangle$$

$\downarrow$  algoritmo       $\downarrow$  datos entrada (N qubits)

Datos de salida ANTES de la medida

El algoritmo  $U$  actúa sobre la superposición de  $2^N$  estados en un registro de  $N$  qubits

Tras la medida se colapsa a una de las  $2^N$  posibilidades

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ejemplos para registro de 2 qubits (ej: 2 partículas con spin)

Definiciones:

$$\text{---} [H] \text{---} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$\text{---} [\varphi] \text{---} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|0\rangle \text{---} [H] \text{---} \begin{matrix} |0\rangle \text{ 50\%} \\ |1\rangle \text{ 50\%} \end{matrix}$$

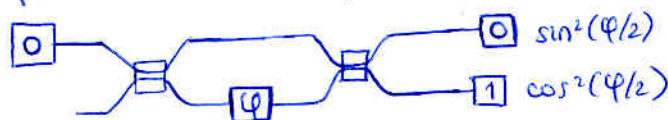
$$|0\rangle \text{---} [H] \text{---} [H] \text{---} |0\rangle \text{ 100\%}$$

superposición de estados ANTES de la medida

$$|0\rangle \text{---} [H] \text{---} [\varphi] \text{---} [H] \text{---} \begin{matrix} |0\rangle \sin^2(\varphi/2) \\ |1\rangle \cos^2(\varphi/2) \end{matrix}$$

multiplicación matricial:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2(\varphi/2) \\ \cos^2(\varphi/2) \end{bmatrix}$

implementación con fotón en un Mach-Zender



• NOT gate

$$\begin{matrix} 0 \text{---} [X] \text{---} 1 \\ 1 \text{---} [X] \text{---} 0 \end{matrix} \equiv b \text{---} [X] \text{---} \bar{b}$$

• controlled-NOT gate:





# TELEPORTACIÓN CUÁNTICA

- Como hemos visto, una de las conclusiones que se obtuvo de la discusión acerca de la paradoja EPR fue la demostración de la NO LOCALIDAD cuántica (debido a la violación de la inecuación de Bell) que justifica porqué la medida de una partícula puede afectar de manera instantánea a otra, y da pie a la idea de teleportación.
- La idea es enviar información cuántica (i.e. estado de función de onda) sin el intercambio de qubits.
- Las demostraciones prácticas en la actualidad sólo se han realizado con fotones, así que hablaremos solamente de ese caso



1. El teorema de no-clonación cuántica impide clonar el fotón original. El fotón original debe por tanto ser destruido o irreversiblemente modificado.
  2. La fidelidad perfecta de  $|\psi\rangle$  entre entrada y salida sólo es posible si el sistema no obtiene ninguna información de  $|\psi\rangle$ . Cualquier información que obtenga supondrá una degradación.
  3. No se transporta materia entre entrada y salida; sólo información
  4. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la teleportación no puede usarse para transmisión de información a mayor velocidad que la luz.
- Montaje del sistema: ver la cara siguiente →

## Nota previa:

Si sabes que un fotón está en estado  $(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)$  puedes convertirlo en  $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$  con una simple transformación unitaria (sin medir ni colapsar)

Matricialmente:

$$\begin{aligned} -\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle &= \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \\ \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle &= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

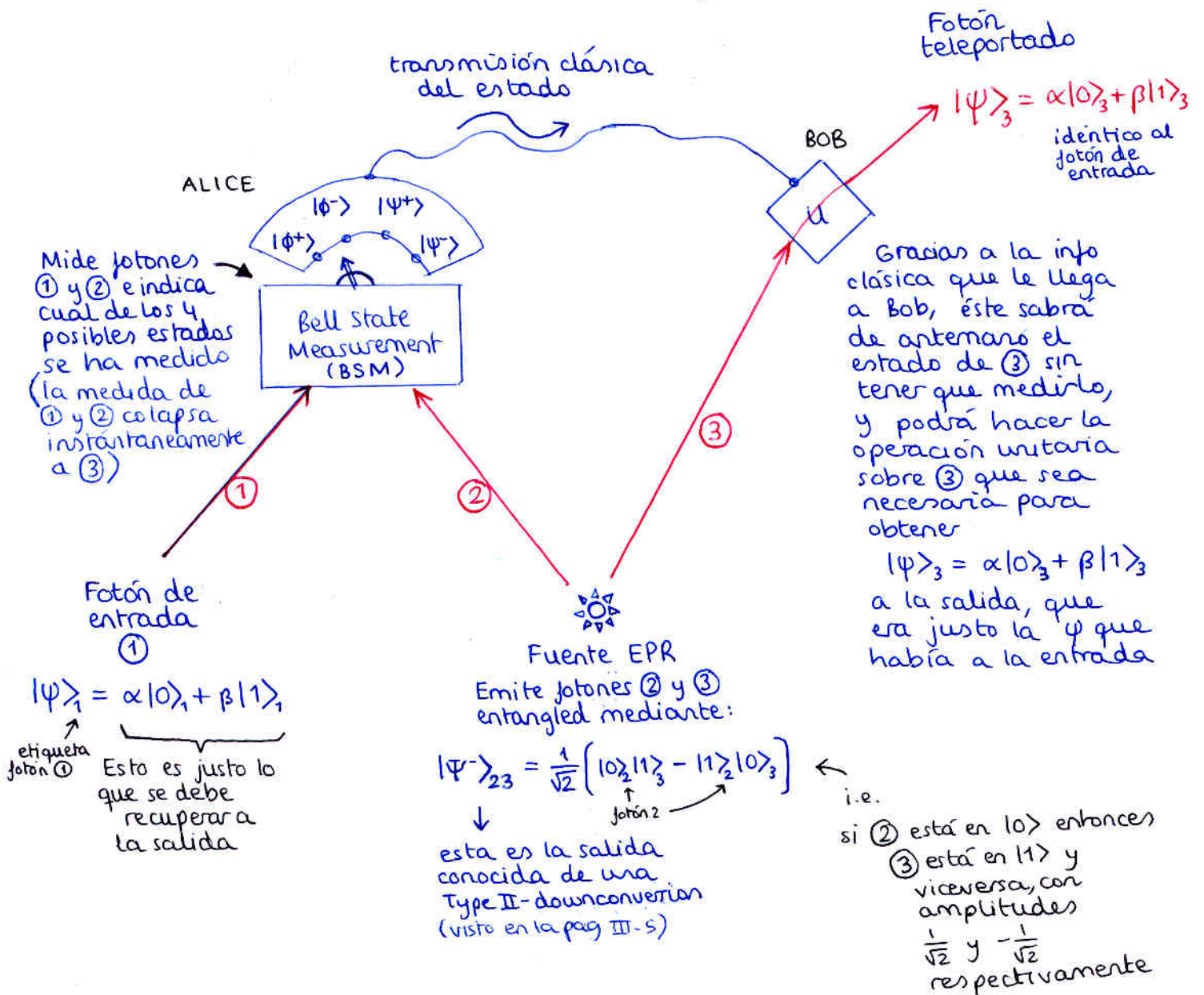
u  
fácil de implementar

## Demostración experimental

- Se hizo por primera vez en 1997-98
- sólo se usaba la detección de  $|\psi\rangle_{12}$  por ser la más sencilla
- Cuando Alice detectaba  $|\psi\rangle_{12}$  entonces Bob sabía que su fotón era  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  idéntico al de entrada (su operador unitario es la identidad)

D. Bouwmeester, et al. Nature 390, 575

# Teleportación de la polarización de un fotón



Escribamos la función de onda de todo el sistema:

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \underbrace{\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1}_{\text{fotón ①}} \cdot \underbrace{\left( |0\rangle_2 |1\rangle_3 - |1\rangle_2 |0\rangle_3 \right)}_{\text{fotones ② y ③ entangled}} \right]$$

desarrollar producto

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{aligned} &+\alpha|0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \\ &-\alpha|0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 \\ &+\beta|1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \\ &-\beta|1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 \end{aligned} \right)$$

(estados de Bell)

Definimos:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) \\ |\Phi^-\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 - |1\rangle_1 |1\rangle_2) \\ |\Psi^+\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) \\ |\Psi^-\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2) \end{aligned}$$

¡entangled!

estados de ① y ②

estado de ③

$$= \frac{1}{2} \left( \begin{aligned} &|\Phi^+\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) \\ &+ |\Phi^-\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \\ &+ |\Psi^+\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \\ &- |\Psi^-\rangle_{12} (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \end{aligned} \right)$$

Alice en su BSM mide uno de estos (lo colapsa) y se lo dice a Bob

Bob por tanto sabe que ③ habrá colapsado (teleportación) a uno de estos 4 estados. Al saber la medida de Alice, Bob sabe a cual de los 4 ha colapsado sin tener que medirlo

ejemplo: si Alice ha medido  $|\Phi^+\rangle_{12}$  entonces Bob sabe que ③ ha colapsado a  $(\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3)$  y puede hacerte la transf. unitaria para ser  $(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3)$